

Mecánica Cuántica

Semestre 2026-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Brandon Alberto Salinas Roa

Ayud: Edgar Giovanni Alonso Torres



Tarea 4

Fecha de término: 29/05/2026

Momento angular y átomo hidrogenoide

Ejercicio 1: Valores esperados de para $j = 1$

Considera un sistema con momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está generado por la base $\{|1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de eigenvectores comunes a J^2 y J_z de la forma $|j, m\rangle$. Si el sistema se encuentra en el estado normalizado

$$|\psi\rangle = \alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle,$$

con α, β y γ números complejos:

- Calcula el valor esperado $\langle \vec{J} \rangle = (\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle, \langle J_z \rangle)$ en términos de α, β y γ .
- Encuentra una expresión para los valores esperados $\langle J_y^2 \rangle$ y $\langle J_z^2 \rangle$ en términos de α, β y γ .

Ejercicio 2: Cambio de eje de cuantización

Considera un sistema físico arbitrario cuyo espacio de estados de 4 dimensiones se genera por los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z para $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$.

- Escribe los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z , $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$. Aquí no tienes que hacer ningún cálculo, sólo hace falta que los enlistes.
- Escribe los eigenvectores comunes a J^2 y J_x denotados por $|j, m_x\rangle$ en términos de los $|j, m_z\rangle$. Para hacer esto escribe a J_x como matriz (usando J_+ y J_-) en la base que escribiste en el inciso anterior. Al diagonalizar esta matriz encontrarás los eigenvecotres de J_x en términos de los eigenvectores de J_z . ¿Cuáles son los eigenvaores de J_x ? (Puedes auxiliarte de una computadora para diagonalizar)

Ejercicio 3: Estado de un espín

En clase hablamos acerca del operador asociado al observable de espín $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde, en la base de eigenvectores de S^2 y S_z denotados por

$$\{|s = 1/2, m_s = 1/2\rangle = |\uparrow\rangle, |s = 1/2, m_s = -1/2\rangle = |\downarrow\rangle\},$$

las representaciones matriciales de las componentes son

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos operadores podemos obtener el observable de espín en una dirección arbitraria $\vec{u}$ determinada por los ángulos θ y φ por medio de

$$\vec{S} \cdot \vec{u} = S_u = S_x \sin \theta \cos \varphi + S_y \sin \theta \sin \varphi + S_z \cos \theta$$

Muestra que

$$\begin{aligned} |+\rangle_u &= \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\downarrow\rangle \\ |-\rangle_u &= -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\uparrow\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

son los eigenvectores de S_u .

Ejercicio 4: Desviación RMS en momento angular

Considerando un eigenestado de momento angular arbitrario $|\ell, m\rangle$. Encuentra: $\langle L_x \rangle$, $\langle L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, ΔL_x , ΔL_z .

Observa la estructura de las ecuaciones antes de hacer cálculos innecesarios.

Ejercicio 5: Operadores escalera de momento angular

En clase encontramos que los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ con $m = \ell$ tienen la forma

$$Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = N \sin^\ell \theta e^{i\ell\varphi},$$

donde N es una constante de normalización.

- Calcula N para el caso $\ell = 1$.
- Usa L_- para obtener $Y_1^0(\theta, \varphi)$ y $Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$ a partir de $Y_1^1(\theta, \varphi)$.

Ejercicio 6: Atomo hidrogenoide

- Enlista todos los estados $|n, l, m\rangle$ con $n = 4$.
- Grafica todas funciones radiales distintas para el átomo hidrogenoide con $n = 4$.

Ejercicio 7: Valores esperados para átomo hidrogenoide

Para un átomo hidrogenoide en el estado $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$ calcula:

- El valor esperado $\langle r \rangle$. Además de encontrar una expresión simbólica, calcula su valor en metros.
- El radio con máxima densidad de probabilidad de encontrar al electrón (Ojo: recuerda que las funciones de onda calculadas están en coordenadas esféricas y para integrarlas se requiere el elemento de volumen adecuado)

Teoría de perturbaciones

Ejercicio 8: Oscilador anarmónico

Considera el hamiltoniano de oscilador armónico

$$H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

con eigenvalores $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ y eigenvectores $|\phi_n\rangle$. Este oscilador está sometido a una perturbación de la forma

$$W = \lambda\hbar\omega X^3 \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}.$$

- a) Escribe W en términos de a y $a^\dagger$ y $N = a^\dagger a$.
- b) Encuentra cuáles elementos de matriz $\langle\phi_i|W|\phi_j\rangle$ de W son distintos de cero.
- c) Para el nivel n , calcula la corrección de la energía hasta segundo orden en λ debido a esta perturbación.
- d) Calcula la corrección a primer orden en λ para el eigenvector $|\phi_n\rangle$.

Ejercicio 9: Sistema de dos niveles

Considerar el hamiltoniano H_0 y la perturbación W dados por

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad W = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Responda las siguientes preguntas (puedes auxiliarte con la computadora):

- a) ¿Cuáles son los eigenvalores y eigenvectores de H_0 ?
- b) ¿Cuáles son los eigenvalores de $H_0 + W$ de acuerdo a la teoría de perturbaciones de primer y segundo orden?
- c) ¿Cuáles son los eigenvalores exactos de $H_0 + W$?
- d) Graficar **por computadora** los eigenvalores obtenidos en los incisos anteriores en función de Δ para distintos valores reales de Ω de tal forma que sea fácil comparar la solución exacta y la de teoría de perturbaciones (i.e. ponlas en la misma gráfica). ¿En qué región la solución por teoría de perturbaciones se aproxima bien a la solución exacta?

Suma de momentos angulares

Para esta tarea usaremos la notación de suma de momentos angulares que usamos en clase. En la que

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

cuyos números cuánticos asociados son j, m , j_1, m_1 y j_2, m_2 respectivamente.

Ejercicio 10: Suma de momentos angulares

En este ejercicio mostrarás que al sumar dos momentos angulares el número cuántico de magnitud de momento angular total j cumple que:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2.$$

- a. Usando que $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ y la relación entre la magnitud de un momento angular y su proyección ($-j \leq m \leq j$) muestra que el valor máximo que puede tener la magnitud de momento angular total es

$$j_{\max} = m_{\max} = m_{1\max} + m_{2\max} = j_1 + j_2.$$

- b. Muestra que para que el número de elementos en las bases $\{|j_1 j_2 j m\rangle\}$ y $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ sea el mismo se debe cumplir que $|j_1 - j_2| \leq j$.

Nota: puedes usar que $j \leq j_1 + j_2$.

Ejercicio 11: Conmutador de momento angular

En este ejercicio verás por qué se usa J_z para definir la la base de momento angular total y no, por ejemplo, J_{1z} o J_{2z} .

- a. Calcula $[J^2, J_{1z}]$ y adivina cuál es el valor de $[J^2, J_{2z}]$ ¿Conmutan estos operadores?
- b. Usa los resultados del inciso anterior para mostrar que $[J^2, J_z] = 0$.

Ejercicio 12: Suma de momentos angulares con $j_1 = 1$ y

$j_2 = 1$

Considera dos momentos angulares $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ cuya magnitud es $j_1 = j_2 = 1$.

- a. Enlista todos los elementos de la base de eigenvectores comunes de $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$.
- b. Enlista todos los elementos de la base de eigenvectores comunes de J_1^2, J_2^2, J^2, J_z .
- c. Escribe $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 2\rangle$ y $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = -2\rangle$ en términos de la base $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$. Explica tu respuesta.
- d. Encuentra $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 0\rangle$ en términos de la base $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ usando el operador de descenso J_- y el resultado del inciso anterior.
- e. Escribe $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 0\rangle$ en términos de la base $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ usando tu tabla/programa preferido para obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan. Indica qué utilizaste.