Mecánica Cuántica

Semestre 2026-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Brandon Alberto Salinas Roa

Ayud: Edgar Giovanni Alonso Torres

Tarea 2

Fecha recomendada de término 24 de abril 2026

Ejercicio 1: Pozo infinito

El objetivo de este ejercicio es revisar las soluciones y argumentos asociados al problema del pozo cuadrado infinito. Considera una partícula de masa m que se mueve en una dimensión cuyo Hamiltoniano es $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X})$ con

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases}$$

En la representación de posición $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ y la ecuación de eigenvalores del hamiltoniano $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$ toma la forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Fuera del pozo se debe cumplir que $\psi(x) = 0$ (Como en este caso $V(x)$ no es finito, sí es posible que $\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$ sea discontinua). Esto define las condiciones de frontera.

a. Encuentra las eigenfunciones y eigenvalores que son solución esta ecuación. Escribe tus soluciones de forma normalizada.

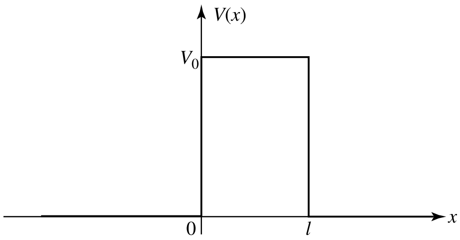
b. Haz un dibujo de algunas de las soluciones obtenidas.

c. Muestra que las soluciones obtenidas son ortonormales calculando el producto interno entre dos eigenfunciones distintas arbitrarias.

d. Calcula la desviación RMS de la posición $\Delta\hat{X}$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano. ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

Ejercicio 2: Tunelaje cuántico

En clase discutimos que para una partícula de masa m que incide con una energía E en una barrera de potencial de ancho l y altura V_0 como en el dibujo,



el coeficiente de transmisión para $E < V_0$ es

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2(\rho l)} \qquad\qquad \rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar.$$

a. Plantea soluciones generales a la ecuación de Schrödinger en cada región y las condiciones de frontera que tendrían que cumplir cada una para obtener las eigenfunciones de este problema. No es necesario que las resuelvas.

b. Muestra que cuando $\rho l \gg 1$ la transmisión disminuye exponencialmente con el grosor de la barrera y encuentra una expresión aproximada para T.

c. Considera un electrón con energía $E = 1\,\mathrm{eV}$, que se topa una barrera de $V_0 = 2\,\mathrm{eV}$ y ancho $l = 1\,\text{Å}$. Calcula el orden de magnitud de $1/\rho$ que es el rango de la onda evanescente. ¿Cuál es la probabilidad de transmisión T para este caso?

d. Si ahora consideras un protón con los mismos valores $E = 1\,\mathrm{eV}$, $V_0 = 2\,\mathrm{eV}$ y $l = 1\,\text{Å}$ calcula $1/\rho$ y T. Compara el resultado con el del inciso anterior y explica por qué no observamos tunelaje en la vida cotidiana.

Ejercicio 3: Potencial Lineal

Considera una partícula de masa m confinada a moverse en la región $x > 0$ y sujeta a un potencial lineal dado por $V(x) = \alpha x$ con α una constante real positiva. Encuentra las eigenfunciones del hamiltoniano para este problema y, dado que no se pueden obtener los eigenvalores analíticamente, encuentra la ecuación que sería necesario resolver numéricamente para obtenerlos. No es necesario que presentes las eigenfunciones de manera normalizada.

Para resolver esto puedes usar que la ecuación de Airy dada por $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - xy = 0$ tiene como solución general una combinación lineal de las funciones $\mathrm{Ai}(x)$ y $\mathrm{Bi}(x)$ conocidas como funciones de Airy del primer y segundo tipo. Además puedes dar por hecho que $\mathrm{Bi}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ mientras que $\mathrm{Ai}(x)$ es una función acotada.

Grafica algunas soluciones y observa cómo la función de onda transiciona de un comportamiento ondulatorio en $V(x) < E$ a uno de decaiomiento cuando $V(x) > E$.

Ejercicio 4: Potencial Delta de Dirac

En ocasiones puede ser útil modelar la interacción entre partículas utilizando un potencial

$$V(x) = \lambda\delta(x),$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Este tipo de potencial puede verse como el caso límite del pozo o barrera de potencial cuando el ancho tiende a cero pero la profundidad tiende a infinito y podría usarse, por ejemplo, para modelar una interacción de contacto.

Muestra que para $\lambda < 0$ existe un eigenestado ligado (con $E < 0$). Encuentra y dibuja su función de onda resolviendo la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m. Grafica la solución obtenida.

Para resolver este ejercicio, considera que si $x < 0$ o $x > 0$, se tiene que $V(x) = 0$ y en ese caso ya conoces la solución general a la ecuación de Schrödinger. La dificultad para encontrar $\psi(x)$ radica en saber cómo unir las dos soluciones obtenidas. Normalmente bastaría utilizar la condición de continuidad de la función de onda y de su derivada además de la condición de normalización $\int |\psi|^2 = 1$ para determinar por completo la función de onda. Sin embargo, cuando obtuvimos la condición de continuidad de la derivada en clase utilizamos la hipótesis de que el potencial era acotado lo cual no se cumple en este caso. Para encontrar la condición que cumple $\psi'(x)$ en $x = 0$, integra la ecuación

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

alrededor de un intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ y analiza el caso $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 5: Esquema de interacción

En clase discutimos los esquemas de Heisenberg y Schrödinger para describir la dinámica de un sistema. En el de Schrödinger los operadores son estáticos mientras los kets evolucionan en el tiempo y en el esquema de Heisenberg se toma el enfoque opuesto. En este ejercicio desarrollarás el esquema de interacción que es un caso intermedio entre ambos.

Considera un sistema físico arbitrario, donde su Hamiltoniano es $H_0(t)$ y su operador de evolución asociado es $U_0(t, t_0)$ con $U_0(t, t) = \mathbb{1}$.

a. Muestra que la ecuación de Schrödinger implica que el operador de evolución cumple

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0(t, t_0) = H_0(t)U_0(t, t_0).$$

(hicimos esto en clase).

(Para incisos b y c)

Suponiendo que el sistema es perturbado por una "interacción" $W(t)$ de tal modo que su Hamiltoniano total se convierte en

$$H(t) = H_0(t) + W(t)$$

Denotando al vector de estado en el esquema de interacción con $|\psi_I(t)\rangle$, que en términos del vector de estado en el esquema de Schrödinger es $|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0)\,|\psi_S(t)\rangle$.

b. Muestra que la ecuación de evolución para $|\psi_I(t)\rangle$ es

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi_I(t)\rangle = W_I(t)\,|\psi_I(t)\rangle\,,$$

donde $W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)W(t)U_0(t, t_0)$.

c. Explica cualitativamente por qué cuando la perturbación $W(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$ la dinámica del vector $|\psi_I(t)\rangle$ es mucho más lenta que la de $|\psi_S(t)\rangle$.

En estos dos incisos se muestra la utilidad del esquema de interacción: Conociendo la dinámica correspondiente a $H_0(t)$, en el esquema de interacción la ecuación de Schrödinger restante sólo involucra a $W(t)$.

Ejercicio 6: Evolución temporal de un sistema de dos niveles

Considera un sistema de dos estados que describimos en la base ortonormal $\{|b\rangle, |e\rangle\}$. En esta base, podemos escribir al Hamiltoniano como

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}(|b\rangle\langle e| + |e\rangle\langle b|),$$

con Ω un número real. Éste es el Hamiltoniano de un átomo interactuando con luz resonante a la transición atómica o bien un espín interactuando con un campo magnético oscilante lo cual es relevante para describir la resonancia magnética nuclear utilizada para imagenología.

a. Encuentra los egienvalores y eigenvecotres de H.

b. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|b\rangle$ y cuando inicia en el estado $|e\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|b\rangle$ al tiempo t para cada condición inicial? Grafica tu respuesta.
(*Hint: escribe $|\psi(0)\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores del Hamiltoniano.*)

Ejercicio 7: Partícula en un anillo

Considera una partícula confinada a moverse dentro de un anillo. En este caso, la ecuación de eigenvalores del Hamiltoniano en la representación de posición toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}(\theta) = E\psi(\theta).$$

a. ¿Cómo llegas a esta ecuación?

b. Encuentra los **eigenvalores** y las **eigenfunciones normalizadas** para este problema. *Hint: ¿Qué condición de frontera deben cumplir las eigenfunciones?*