

Mecánica Cuántica

Semestre 2026-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Brandon Alberto Salinas Roa

Ayud: Edgar Giovanni Alonso Torres



Tarea 1

Fecha recomendada de término: 13 marzo 2025

Ejercicio 1: Amplitudes de probabilidad

Considerando una base $\gamma = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y los observables $\hat{A} = a_1 |1\rangle\langle 1| + a_2 |2\rangle\langle 2| + a_3 |3\rangle\langle 3|$ y $\hat{B} = |3\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3|$. Contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los resultados posibles que se pueden obtener al medir el observable $\hat{A}$?
- Normaliza el estado $|\psi_1\rangle = |1\rangle + |2\rangle$ y encuentra la probabilidad de medir $\hat{A}$ y obtener a_1 , la probabilidad de obtener a_2 y la probabilidad de obtener a_3 .
- ¿Cuáles son los resultados posibles que se pueden obtener al medir el observable $\hat{B}$?
- Considerando el estado $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3\rangle + |1\rangle)$, ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles al medir $\hat{B}$?
- Considerando el estado $|\psi_3\rangle = |1\rangle$, ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles al medir $\hat{B}$?

Ejercicio 2: Postulado 4 de la Mecánica Cuántica

Tomando en cuenta el cuarto postulado muestra que la suma de las probabilidades de obtener todos los resultados es 1 para el caso de espectro discreto no degenerado y para el caso de espectro discreto degenerado. ¿Qué significa esta propiedad?

Ejercicio 3: Observables que conmutan

Considera un sistema físico cuyo espacio de estados es generado por los vectores base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Usando esta base definimos a los operadores

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(-|u_1\rangle\langle u_1| - |u_2\rangle\langle u_2|) \quad \hat{B} = \hbar b(|u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1|),$$

donde $\hbar$, ω_0 y b son constantes reales.

- ¿Son $\hat{H}$ y $\hat{B}$ Hermitianos? Muéstralo.
- Muestra que $\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan.
- Encuentra un conjunto de eigenvectores comunes a $\hat{H}$ y $\hat{B}$.

Ejercicio 4: El conmutador de $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$

Calcula el conmutador entre $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$. Puedes usar que $\langle \mathbf{r} | \hat{\mathbf{P}} | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r})$ o que $\langle \mathbf{p} | \hat{\mathbf{P}} | \psi \rangle = \mathbf{p} \langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \mathbf{p} \psi(\mathbf{p})$.

Ejercicio 5: El conmutador de $[\hat{P}, V(\hat{X})]$

En este ejercicio mostrarás que $[\hat{P}, V(\hat{X})] = -i\hbar V'(\hat{X})$.

- Usando que $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ muestra que $[\hat{P}, \hat{X}^n] = -i\hbar n\hat{X}^{n-1}$.
(Usa inducción matemática.)
- Usa el inciso anterior para mostrar que $[\hat{P}, V(\hat{X})] = -i\hbar V'(\hat{X})$
(*Sugerencia:* Escribe $V(x)$ usando su expansión en serie.)

Ejercicio 6: Operadores de posición y momento

Calcula el conmutador $[\hat{X}^2, \hat{P}^2]$ en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$. Es decir, déjalo en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$ sin exponente.

Ejercicio 7: Representación de posición y momento

En clase mostramos que $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x|\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$. En este inciso mostrarás una relación análoga para la representación $\{|p\rangle\}$. Muestra que

- Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ la función de onda en el espacio de momento, el efecto de aplicar el operador $\hat{X}$ es:

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dp} \psi(p)$$

- Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ y $\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$ funciones de onda en el espacio de momento, los elementos de matriz del operador $\hat{X}$ están dados por:

$$\langle \varphi|\hat{X}|\psi\rangle = \int dp \varphi^*(p) i\hbar \frac{d}{dp} \psi(p),$$

Ejercicio 8: Valor esperado y desviación RMS

En este ejercicio revisarás y aplicarás las definiciones de valor esperado y de desviación RMS. Considera las funciones de onda adimensionales definidas en todo $\mathbb{R}$ dadas por

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2} \quad \text{y} \quad \psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2\alpha} x e^{-\alpha x^2/2},$$

con α una constante positiva.

- Calcula $\langle \hat{X} \rangle$ para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$.
- Calcula ΔX para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$.
- Realiza un dibujo donde muestres $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $|\psi_0(x)|^2$, $|\psi_1(x)|^2$ y las cantidades calculadas en los incisos anteriores.

Ejercicio 9: Relación de incertidumbre generalizada

En este ejercicio demostrarás la relación de incertidumbre generalizada para dos operadores hermitianos $\hat{A}$ y $\hat{B}$,

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2,$$

donde $\Delta A^2 = \left\langle \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right\rangle$ y $\Delta B^2 = \left\langle \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \right)^2 \right\rangle$.

- a. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \leq \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle$
 - I. Definiendo $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + \lambda |\phi_2\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, encuentra la desigualdad resultante de $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$.
 - II. La desigualdad obtenida es válida para toda λ . En particular para $\lambda = -\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle / \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle$. Usa esto para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.
- b. Usando esta desigualdad para $|f\rangle = \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right) |\psi\rangle$ y $|g\rangle = \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \right) |\psi\rangle$ obtén que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq |\langle f | g \rangle|^2.$$

- c. Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$.
- d. Muestra que $\langle f | g \rangle = \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle$ y $\langle g | f \rangle = \langle \hat{B} \hat{A} \rangle - \langle \hat{B} \rangle \langle \hat{A} \rangle$.
- e. Concluye que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2.$$

- f. ¿Qué forma toma la relación de incertidumbre para $\hat{A} = \hat{X}$ y $\hat{B} = \hat{P}$?

Nota: el conmutador de dos operadores Hermitianos tiene un factor de i por lo que la cantidad dentro de el paréntesis es real y por tanto su cuadrado es positivo.

Ejercicio 10: Densidad de corriente de probabilidad

En este ejercicio profundizarás en el concepto de densidad de corriente de probabilidad de una función de onda $\psi(\mathbf{r})$ definido por $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*]$.

- a. Considera los paquetes de onda unidimensionales dados por $\psi_1(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right)$ y $\psi_2(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2} + ikx\right)$ con N , L y k constantes reales positivas.
 - I Calcula $|\psi_1(x)|^2$, $|\psi_2(x)|^2$ y dibújalas en función de x .
 - II Calcula la densidad de corriente de probabilidad para $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$. Agrega flechas a tu dibujo del inciso anterior indicando hacia dónde fluye la probabilidad.
- b. Escribiendo a la función de onda tridimensional en su descomposición polar como $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}$, con S y ρ funciones reales. Muestra que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho \frac{\nabla S}{m}$ usando la definición de densidad de corriente de probabilidad vista en clase.
- c. Considerando los resultados de los incisos anteriores ¿Cómo se relacionan la densidad de corriente de probabilidad y la fase de una función de onda?