Mecánica Cuántica

Semestre 2026-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Brandon Alberto Salinas Roa

Ayud: Edgar Giovanni Alonso Torres

Tarea 0
Fecha recomendada de término: 13/02/2026

El objetivo principal de esta tarea es que te familiarices con la notación de Dirac que se utiliza en muchos los libros modernos de mecánica cuántica. Por eso, trata de utilizar la notación lo más posible a lo largo de esta tarea.

Ejercicio 1: Notación de Dirac

Considera un espacio cuya base ortonormal está dada por los kets $\gamma = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Manteniendo este orden para la base, contesta los siguientes incisos:

a. Escribe la representación en componentes (como vector columna) de $|2\rangle$.

b. Escribe la representación en componentes de $\frac{|2\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}$.

c. Escribe la representación en componentes de $\langle 3|$.

d. Escribe la representación en componentes de los operadores $|3\rangle\langle 2|$ y de $|2\rangle\langle 3|$.

e. Escribe la representación en componentes de $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|$.

f. Escribe $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en notación de Dirac en términos de la base.

g. Escribe $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ en notación de Dirac en términos de la base.

Ejercicio 2: Operadores y conmutadores

Sean $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ operadores. Muestra que:

a. $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

b. $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = -\left[\hat{B}, \hat{A}\right]$.

c. $\left[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]$.

d. $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$.

Ejercicio 3: Relación de completitud

Considerando la base ortonormal $\gamma = \{|0\rangle, \ldots, |n\rangle\}$ contesta los siguientes incisos.

a. Muestra que $\sum_{i=0}^{n} |i\rangle\langle i|$ es la identidad. Para esto basta mostrar que al aplicar este operador a un vector arbitrario se obtiene el mismo vector. Esta representación de la identidad es conocida como la relación de completitud.

b. Usa la relación de completitud para mostrar que el producto interior tiene la forma conocida $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{n} \phi_i^* \psi_i$ donde ϕ_i y ψ_i son las componentes de $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ en la base γ.

Ejercicio 4: Valores y vectores propios

Considera el operador $\hat{\sigma}_y$ cuya matriz, escrita en la base ortonormal $\gamma = \{|1\rangle, |2\rangle\}$, se escribe como

$$[\hat{\sigma}_y]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Escribe $\hat{\sigma}_y$ usando notiación de Dirac en términos de los vectores de la base.

b. ¿Es $\hat{\sigma}_y$ Hermitiano? Muéstralo.

c. Encuentra los valores y vectores propios de $\hat{\sigma}_y$ (escribiendo su expansión en términos de la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$).

d. Encuentra las matrices que representan a los proyectores a estos eigenvectores.

e. Verifica que los eigenvectores encontrados satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completud.

Ejercicio 5: Eigenespacios

Este ejercicio está para que repases cómo se calculan eigenvalores y eigenvectores de una matriz y revises el concepto de "eigenespacios". No es necesario que utilices notación de Dirac en este. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Encuentra sus eigenvalores y eigenvectores.

b. Haz un boceto junto con una explicación del eigenespacio correspondiente a cada uno de los eigenvalores encontrados. Es decir, para cada eigenvalor, describe la forma de los conjuntos de todos los eigenvectores que que le corresponden.

Ejercicio 6: Base de eigenvectores

Considera un observable $\hat{H}$ y una base de sus eigevectores $|\phi_n\rangle$. Dando por hecho que los $|\phi_n\rangle$ forman una base discreta ortonormal considera el operador $\hat{U}(m,n)$ definido como $\hat{U}(m,n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$.

a. Calcula el adjunto $\hat{U}^\dagger(m,n)$ de $\hat{U}(m,n)$.

b. Calcula el conmutador $\left[\hat{H}, \hat{U}(m,n)\right]$.

c. Muestra que $\hat{U}(m,n)\hat{U}^\dagger(p,q) = \delta_{nq}\hat{U}(m,p)$.

d. Si $\hat{A}$ es un operador cuyos elementos de matriz son $A_{mn} = \langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle$ muestra que $\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn}\hat{U}(m,n)$.

e. ¿Cómo interpretas el resultado del inciso anterior?