

<https://asaf.pm/live>

Oscilador armónico V:

Estados coherentes

Buscamos estados $|\psi(t)\rangle$ tales que $\langle \hat{X} \rangle(t)$, $\langle \hat{P} \rangle(t)$, $\langle \hat{H} \rangle(t)$ se parezcan lo más posible a sus contrapartes clásicas $x(t)$, $p(t)$, E .

(Clásico con variables normales

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{x}(t) + i\underline{p}(t)) \Rightarrow \dot{\alpha} = -i\omega\alpha \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}); \underline{p}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t})$$

Descripción cuántica

$$\underline{\hat{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \text{ para comparar calculamos}$$

$$\langle \underline{\hat{X}} \rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \hat{a} \rangle(t) + \langle \hat{a}^+ \rangle(t))$$

¿Cómo son $\langle \hat{a} \rangle(t)$ y $\langle \hat{a}^+ \rangle(t)$?

Como $\hat{a}$ no depende explícitamente de t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{a} \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{a}, \hat{H}] \rangle = \frac{\hbar\omega}{i\hbar} \langle [\hat{a}, \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}] \rangle \\ &= -i\omega \langle \hat{a} \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{a} \rangle(t) = \langle \hat{a} \rangle(0) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{a}^+ \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{a}^+ | \psi(t) \rangle = \langle \hat{a} \rangle(0)^* e^{i\omega t}$$

$$\langle \underline{\hat{X}} \rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \hat{a} \rangle(0) e^{-i\omega t} + \langle \hat{a} \rangle(0)^* e^{i\omega t})$$

$$\langle \underline{\hat{P}} \rangle(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\langle \hat{a} \rangle(0) e^{-i\omega t} - \langle \hat{a} \rangle(0)^* e^{i\omega t})$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}); \underline{p}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t})$$

Buscamos

$$\langle \underline{\hat{X}} \rangle(t) = \underline{x}(t) \quad \text{y} \quad \langle \underline{\hat{P}} \rangle(t) = \underline{p}(t)$$

$$\langle \underline{\hat{X}} \rangle(t) + i \langle \underline{\hat{P}} \rangle(t) = \underline{x}(t) + i \underline{p}(t)$$

Esto ocurre $\Leftrightarrow \langle \hat{a} \rangle(t) = \alpha_0$

$\therefore$ Si encontramos un $|\psi(0)\rangle$ que cumpla $\langle \psi(0) | \hat{a} | \psi(0) \rangle = \alpha_0$ obtendremos el "estado coherente".

Vamos ignorar este pues básicamente nos interesa $n \gg 1$ (n de $|\phi_n\rangle$)

$$\langle \hat{H} \rangle(t) = \hbar \omega \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \rangle$$

$$E(t) = \hbar \omega |\alpha_0|^2 = \hbar \omega \left(\underline{\dot{x}}(0)^2 + \underline{\dot{p}}(0)^2 \right)$$

La otra condición para estados coherentes $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha_0|^2$

$\therefore$ Las condiciones que definen a un edo. coherente son.

$$\langle \psi(0) | \hat{a} | \psi(0) \rangle = \alpha_0$$

$$\langle \psi(0) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi(0) \rangle = \alpha_0^* \alpha_0$$



Vamos a ver que esto significa que $|\psi(0)\rangle$ debe ser eigenvector de $\hat{a}$.

Para mostrarlo definimos $\hat{b} = \hat{a} - \alpha_0$

$$\|\hat{b}|\psi(0)\rangle\|^2 = \langle \psi(0) | \hat{b}^\dagger \hat{b} | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | (\hat{a}^\dagger - \alpha_0^*)(\hat{a} - \alpha_0) | \psi(0) \rangle$$
$$= \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \alpha_0 \langle \hat{a}^\dagger \rangle - \alpha_0^* \langle \hat{a} \rangle + \alpha_0^* \alpha_0$$

Usando $\left(\text{kitten} \right) \rightarrow = \alpha_0^* \alpha_0 - \alpha_0 \alpha_0^* - \alpha_0^* \alpha_0 + \alpha_0^* \alpha_0 = 0$

$$\therefore \hat{b}|\psi(0)\rangle = 0 \Rightarrow \hat{a}|\psi(0)\rangle = \alpha_0|\psi(0)\rangle$$

$\therefore$ El estado buscado $|\psi(0)\rangle$ es un e-vector de $\hat{a}$ con eigenvalor α_0 (que codifica las condiciones iniciales clásicas).

Vamos a cambiar de notación a

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

e-valor α
e-vector de $\hat{a}$

¿Cómo se ve $|\alpha\rangle$ en la base $|n\rangle = |\phi_n\rangle$?
(llamada base de Fock).

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha) |\phi_n\rangle$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha) \hat{a} |\phi_n\rangle$$

Renombramos $n \rightarrow n+1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha) \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} |\phi_n\rangle$$

es de e-valores

$$\therefore \alpha |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha) \alpha |\phi_n\rangle$$

$$\therefore C_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} = C_n(\alpha) \alpha$$

$$C_{n+1}(\alpha) = C_n(\alpha) \alpha / \sqrt{n+1}$$

$$C_n(\alpha) = C_{n-1}(\alpha) \frac{\alpha}{\sqrt{n}} = C_{n-2}(\alpha) \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$\vdots$$

$$= C_0(\alpha) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Por normalización $\sum |C_n(\alpha)|^2 = 1$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n(\alpha)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_0(\alpha)|^2 \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0(\alpha)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

$$= |C_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} \Rightarrow |C_0(\alpha)| = e^{-|\alpha|^2/2}$$

Elegimos $C_0(\alpha)$ real $\Rightarrow C_0(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}$

Estados coherentes del oscilador armónico

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle$$

Si un sistema está en un estado coherente, ¿Cuál es la probabilidad de encontrarlo en el estado n ?

$$P_n(\alpha) = |\langle \phi_n | \alpha \rangle|^2 = \left| e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{x} + i \underline{p})$$

