

Oscilador armónico: e-valores

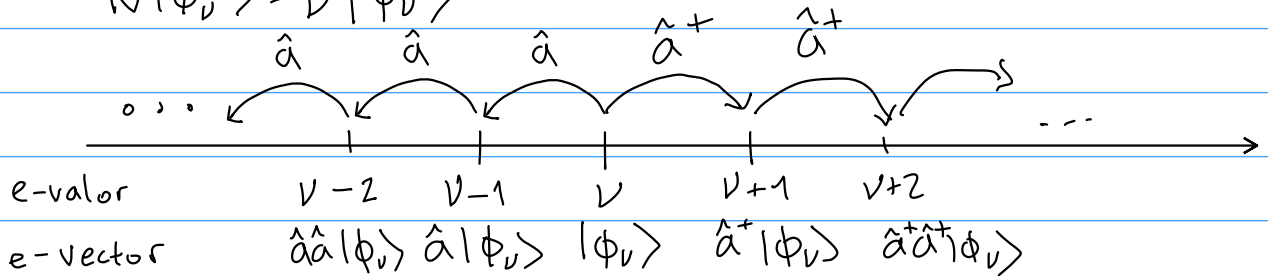
Eigenvalores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P})$$

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$$

$$\hat{N}|\phi_\nu\rangle = \nu|\phi_\nu\rangle$$

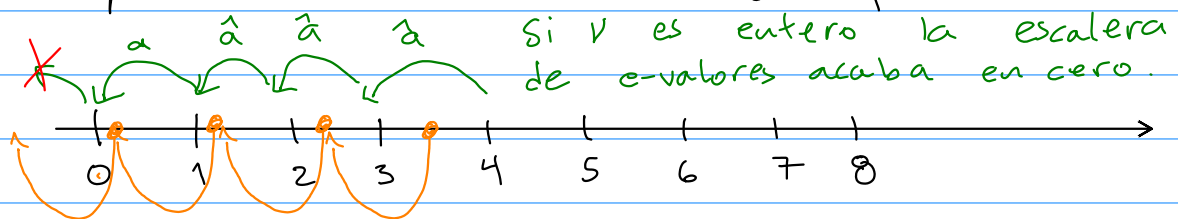


$$\hat{a}|\phi_{\nu=0}\rangle = 0$$

¿Cómo es el espectro de $\hat{N}$?

→ Sabemos que los e-valores de $\hat{N}$ son positivos

→ Para satisfacer todas estas condiciones, el espectro de $\hat{N}$ son los enteros positivos.



Si ν no es entero, podríamos obtener un e-valor negativo ⚠

∴ $\hat{N}$ tiene como espectro a $\mathbb{N}$

∴ Los e-valores de $\hat{H}$ son

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}); n \in \mathbb{N}$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad E_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega \quad E_2 = \frac{5}{2} \hbar\omega \quad \dots$$

Recordemos que en sistemas ligados 1D, no hay degeneración

Eigenvectores

$|\phi_0\rangle$ Partiendo de $\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$ podemos obtener $|\phi_0\rangle$. (podemos escoger $|\phi_0\rangle$ unitario).

$|\phi_1\rangle$ • Para obtener $|\phi_1\rangle$ podemos usar $|\phi_1\rangle = C_1 \hat{a}^+ |\phi_0\rangle$
• Si pedimos que $|\phi_1\rangle$ sea unitario esto determina el valor de C_1
 $1 = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = \langle \phi_0 | \hat{a} C_1^* C_1 \hat{a}^+ | \phi_0 \rangle \stackrel{[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1}{=} |C_1|^2 \langle \phi_0 | \hat{a}^+ \hat{a} + 1 | \phi_0 \rangle$
 $= |C_1|^2 (0 + 1) = |C_1|^2$
• Elegimos que C_1 sea real así obtenemos $C_1 = 1$.

$|\phi_2\rangle$ $|\phi_2\rangle = C_2 \hat{a}^+ |\phi_1\rangle$ y queremos $\langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1$
 $1 = \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \hat{a} C_2^* C_2 \hat{a}^+ | \phi_1 \rangle \stackrel{[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1}{=} |C_2|^2 \langle \phi_1 | \hat{a}^+ \hat{a} + 1 | \phi_1 \rangle$
 $= |C_2|^2 2 \Rightarrow |C_2|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
elegimos fase positiva

$|\phi_n\rangle$ $|\phi_n\rangle = C_n \hat{a}^+ |\phi_{n-1}\rangle$
 $1 = \langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_{n-1} | \hat{a} C_n^* C_n \hat{a}^+ | \phi_{n-1} \rangle = |C_n|^2 [(n-1) + 1]$
 $= |C_n|^2 n$
 $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Podemos obtener $|\phi_n\rangle$ a partir de $|\phi_0\rangle$

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}^+ |\phi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \hat{a}^+ \hat{a}^+ |\phi_{n-2}\rangle$$
$$= \dots = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |\phi_0\rangle$$

- Como $\hat{H}^{(0, \hat{N})}$ es hermitiano, todos sus e-valores son distintos y procuramos normalizar los e-vectores.

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n \rangle \langle \phi_n| = 11$$

← Aunque ya sabemos esto, otra forma de verlo es

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \langle \phi_0 | \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} | \phi_0 \rangle$$

¿Cómo podemos ver que esto es cero para $n \neq m$?

- Si $n > m$, subimos m y bajamos n , pasándonos del piso de la escalera.
- Si $n < m$, subimos n (aplicando $\hat{a}$ hacia la izq) y luego bajamos m (aplicando $\hat{a}^\dagger$ hacia la izq) pasándonos del piso de la escalera.

$$|\phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}^\dagger |\phi_{n-1} \rangle \Rightarrow \hat{a}^\dagger |\phi_{n-1} \rangle = \sqrt{n} |\phi_n \rangle$$

$$\stackrel{n \rightarrow n+1}{\Rightarrow} \hat{a}^\dagger |\phi_n \rangle = \sqrt{n+1} |\phi_{n+1} \rangle$$

Conjugando $\langle \phi_n | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle \phi_{n+1} |$

multiplicando por $\hat{a}$

$$\hat{a} |\phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a} \hat{a}^\dagger |\phi_{n-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) |\phi_{n-1} \rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1} \rangle$$

$\hat{N} |\phi_{n-1} \rangle = (n-1) |\phi_{n-1} \rangle \quad \frac{n-1+1}{\sqrt{n}} \downarrow$

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |\phi_n \rangle &= \sqrt{n+1} |\phi_{n+1} \rangle \\ \hat{a} |\phi_n \rangle &= \sqrt{n} |\phi_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

conjugando $\langle \phi_n | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle \phi_{n+1} |$
 $\langle \phi_n | \hat{a}^\dagger = \sqrt{n} \langle \phi_{n-1} |$

Representaciones matriciales
en la base $\mathcal{B} = \{|\phi_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$.

$$[\hat{a}]_{mn} = \langle \phi_m | \hat{a} | \phi_n \rangle = \langle \phi_m | \phi_{n-1} \rangle \sqrt{n} = \delta_{m,n-1} \sqrt{n}$$

$\langle \phi_m | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle \phi_{m+1} |$

$\hat{a} | \phi_n \rangle = \sqrt{n} | \phi_{n-1} \rangle$

$$[\hat{a}^+]_{mn} = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}$$

$$[\hat{a}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & & \\ & & & 0 & \sqrt{4} & \\ & & & & 0 & \sqrt{5} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad [\hat{a}^+]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$[\hat{a}^+ \hat{a}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 4 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \quad [\hat{X}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle \langle \phi_n| ; \quad \hat{a}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle \langle \phi_n|$$

Funciones de onda

$$\hat{a} |\phi_0\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad |\phi_n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |\phi_0\rangle$$

En la representación de posición

$$\langle x | \hat{a} | \phi_0 \rangle = 0 \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i \hat{P})$$