Oscilador armónico

Clásico: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \rightarrow [\beta] = \frac{1}{L}$

$\underline{x} = \beta x \quad ; \quad \underline{p} = \frac{1}{\hbar\beta} p \qquad \frac{d}{dt}\underline{x} = \omega \underline{p} \qquad \frac{d}{dt}\underline{p} = -\omega \underline{x}$

Variables normales $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{x} + i\underline{p})$; $\frac{d\alpha}{dt} = -i\omega\alpha$

$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \qquad E = \hbar\omega|\alpha_0|^2$

Oscilador armónico cuántico

(por fuerza bruta)

reemplazar cantidades por operadores

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \longrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$$

La ecuación $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ en la rep. de $\{|x\rangle\}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos polinomios de Hermite (pero lo haremos distinto).

- Vamos a utilizar el "método algebráico".

- Adimensionalizamos $\hat{\underline{X}} = \beta \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{X}$; $\hat{\underline{P}} = \frac{1}{\hbar\beta}\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega}}\hat{P}$

Con esto

$$[\hat{\underline{X}}, \hat{\underline{P}}] = \left[\beta\hat{X}, \frac{1}{\hbar\beta}\hat{P}\right] = \frac{\cancel{\beta}}{\hbar\cancel{\beta}}[\hat{X},\hat{P}] = \frac{i\cancel{\hbar}}{\cancel{\hbar}} = i$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}^2 = \frac{(\hbar\beta\hat{\underline{P}})^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hat{\underline{X}}^2}{\beta^2}$$

$$\hat{H} = \hbar^{\cancel{2}} \frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{\hbar}} \frac{\hat{P}^2}{2\cancel{m\omega}} + \frac{1}{2}\frac{\cancel{m}\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{m\omega}} \hbar \hat{X}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{X}^2\right)$$

$$\underline{\hat{H}} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} \Rightarrow \underline{\hat{H}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\hat{P}}^2 + \underline{\hat{X}}^2\right)$$

Definimos operadores $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{\hat{X}} + i\underline{\hat{P}}\right)$

(análogo a las variables normales)

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{\hat{X}}^+ - i\underline{\hat{P}}^+\right)$$

no hacen falta las +

Ojo: Son operadores aunque los denotamos con minúsculas.

$$\underline{\hat{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right) \qquad \underline{\hat{P}} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[\underline{\hat{X}} + i\underline{\hat{P}}, \underline{\hat{X}} - i\underline{\hat{P}}] = \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{[\underline{\hat{X}},\underline{\hat{X}}]} + i[\underline{\hat{P}},\underline{\hat{X}}] - i[\underline{\hat{X}},\underline{\hat{P}}] + \cancelto{0}{[\underline{\hat{P}},\underline{\hat{P}}]}\right)$$

$$= -i\frac{2}{2}[\underline{\hat{X}}, \underline{\hat{P}}] = -i\,i = 1$$

Algo que será útil

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\underline{\hat{X}} - i\underline{\hat{P}}\right)\left(\underline{\hat{X}} + i\underline{\hat{P}}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{\hat{X}}^2 + \underline{\hat{P}}^2 \underbrace{- i\underline{\hat{P}}\,\underline{\hat{X}} + i\underline{\hat{X}}\,\underline{\hat{P}}}_{i[\underline{\hat{X}},\underline{\hat{P}}] = -1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\hat{X}}^2 + \underline{\hat{P}}^2 - 1\right) = \underline{\hat{H}} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{H}} = \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Definimos $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ y $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$

Si encontramos los e-vectores $|\phi_\nu\rangle$ y e-valores ν de $\hat{N}$, tendremos los de $\hat{H}$.

$$\hat{N}|\phi_\nu\rangle = \nu|\phi_\nu\rangle \Rightarrow \hat{H}|\phi_\nu\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|\phi_\nu\rangle$$
$$= \hbar\omega\left(\nu + \frac{1}{2}\right)|\phi_\nu\rangle$$

Hemos definido $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ y $\hat{N}$ $\qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right)$

$$\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$$

- $\hat{a}$ no es hermitiano $\hat{a}$ y $\hat{a}^+$ son distintos
- $(\hat{N})^+ = (\hat{a}^+\hat{a})^+ = \hat{a}^+(\hat{a}^+)^+ = \hat{a}^+\hat{a}$ sí es hermitiano

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^+\overbrace{\cancel{[\hat{a}, \hat{a}]}}^{0} + [\hat{a}^+, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[AB, C] = -[C, AB] = -[C, A]B - A[C, B]$$
$$= [A, C]B + A[B, C]$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^+] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+[\hat{a}, \hat{a}^+] + \overbrace{\cancel{[\hat{a}^+, \hat{a}^+]}}^{0}\hat{a}$$
$$= \hat{a}^+$$

Vamos a usar estas relaciones para encontrar los e-valores de $\hat{N}$ y por ende los de $\hat{H}$.

Factos:

1) Los eigenvalores de $\hat{N}$ son ≥ 0.

Tomando un e-vector $|\phi_\nu\rangle$

$$0 \leq \| \hat{a} |\phi_\nu\rangle \|^2 = \langle \phi_\nu | \hat{a}^+\hat{a} | \phi_\nu \rangle = \langle \phi_\nu | \hat{N} | \phi_\nu \rangle$$
$$= \nu \langle \phi_\nu | \phi_\nu \rangle = \nu \| |\phi_\nu\rangle \|^2$$

Como $|\phi_\nu\rangle$ es e-vector, $\| |\phi_\nu\rangle \|^2 > 0$

$\therefore \ \nu \geq 0$

2) Si $|\phi_\nu\rangle$ es e-vector de $\hat{N}$ con e-valor ν

i) Si $\nu = 0$, $\hat{a}|\phi_\nu\rangle = 0$

ii) Si $\nu > 0$, $\hat{a}|\phi_\nu\rangle$ es un e-vector de $\hat{N}$ con e-valor $\nu - 1$.

i) Si $\nu = 0$, de lo anterior

$$\| \hat{a}|\phi_\nu\rangle \|^2 = \nu \overbrace{\langle \phi_\nu | \phi_\nu \rangle}^{\neq 0}, \quad \text{con } \nu = 0 \quad \| \hat{a}|\phi_\nu\rangle \|^2 = 0$$

entonces $\hat{a}|\phi_\nu\rangle = 0$.

por esto

ii) Si $\nu > 0$, $\hat{a}|\phi_\nu\rangle \neq 0$.

$$\hat{N}(\underbrace{\hat{a}|\phi_\nu\rangle}) = \hat{N}\hat{a}|\phi_\nu\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|\phi_\nu\rangle = (\hat{a}\nu - \hat{a})|\phi_\nu\rangle$$
$$= (\nu - 1)\underbrace{\hat{a}|\phi_\nu\rangle}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = \hat{N}\hat{a} - \hat{a}\hat{N} \Rightarrow \hat{N}\hat{a} = \hat{a}\hat{N} + [\hat{N}, \hat{a}] = \hat{a}\hat{N} - \hat{a}$$

3) Si $|\phi_\nu\rangle$ es e-vector de $\hat{N}$ con e-valor ν

i) $\hat{a}^+|\phi_\nu\rangle$ nunca es cero

ii) $\hat{a}^+|\phi_\nu\rangle$ es un e-vector de $\hat{N}$ con e-valor $\nu + 1$.

i) $$\| \hat{a}^+|\phi_\nu\rangle \|^2 = \langle \phi_\nu | \hat{a}\hat{a}^+ | \phi_\nu \rangle = \langle \phi_\nu | \underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{\hat{N}} + 1 | \phi_\nu \rangle$$

$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

$$= \underbrace{(\nu + 1)}_{> 0} \underbrace{\langle \phi_\nu | \phi_\nu \rangle}_{> 0} > 0$$

ii) $$\hat{N}(\hat{a}^+|\phi_\nu\rangle) = (\hat{a}^+\hat{N} + \hat{a}^+)|\phi_\nu\rangle = (\nu + 1)\hat{a}^+|\phi_\nu\rangle$$

$\hat{a}^+ = [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{N}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{N}$

$\therefore$ $\hat{a}$ y $\hat{a}^+$ son operadores "escalera".