

$$\psi_p(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r \psi_r(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (*)$$

Reescribiendo (*)

$$\langle \vec{p} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r' \langle \vec{r}' | \psi \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}'}$$

¿Cuál es el efecto de aplicar $\hat{R}$ y $\hat{P}$ a un vector $|\psi\rangle$?

Aplicar $\hat{X}$ en la base $\{|x\rangle\}$

$$\langle x | \hat{X} | \psi \rangle = x \langle x | \psi \rangle = x \psi(x)$$

$$\begin{aligned} \text{En 3D} \quad \langle \vec{r} | \hat{X} | \psi \rangle &= x \langle \vec{r} | \psi \rangle = x \psi(\vec{r}) \\ \langle \vec{r} | \hat{R} | \psi \rangle &= \vec{r} \langle \vec{r} | \psi \rangle \end{aligned}$$

Aplicar $\hat{P}$ en la representación $\{|p\rangle\}$

$\hat{P}|\psi\rangle$ en la base de momento

$$\langle p | \hat{P} | \psi \rangle = p \langle p | \psi \rangle = p \psi(p)$$

Aplicar $\hat{p}$ en la representación $\{|x\rangle\}$.

$$\begin{aligned} 1D: \langle x | \hat{p} | \psi \rangle &= \int dp \langle x | p \rangle \langle p | \hat{p} | \psi \rangle \\ &= (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int dp p \psi_p(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \end{aligned}$$

Multiplicar por la variable en el espacio de Fourier(p) equivale a calcular la derivada en el espacio x .

$$\therefore \boxed{\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)}$$

Transformada de Fourier de $p_x \psi_p(\mathbf{p})$ es $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \psi_r(\mathbf{r}) &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p \psi_p(\mathbf{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_r(\mathbf{r}) &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial x} \int d^3p \psi_p(\mathbf{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p \psi_p(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \right) \\ &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p \psi_p(\mathbf{p}) \left(\frac{i}{\hbar} p_x e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \right) \\ &= \mathcal{F} \left(\frac{i}{\hbar} p_x \psi_p(\mathbf{p}) \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_r(\mathbf{r}) = \mathcal{F}(p_x \psi_p(\mathbf{p}))$$

3D :

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | \vec{p} | \psi \rangle &= -i\hbar \nabla \langle \vec{r} | \psi \rangle \\ &= -i\hbar \nabla \psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Representación de momento

$$\langle p | \hat{P} | \psi \rangle = p \langle p | \psi \rangle = p \psi(p)$$

$$\langle p | \hat{X} | \psi \rangle = ?? \quad (\text{tarea})$$

El conmutador $[X, P]$

$$\langle \phi | [\hat{X}, \hat{P}] | \psi \rangle = \langle \phi | [\hat{X}, \hat{P}] | \psi \rangle$$

$$\uparrow$$
$$11 = \int dx |x\rangle\langle x|$$

$$= \int \phi^*(x) \langle x | \hat{X} \hat{P} - \hat{P} \hat{X} | \psi \rangle = \int \phi^*(x) \left[x \langle x | P | \psi \rangle - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \langle x | \psi \rangle \right]$$

$$= \int \phi^*(x) \left[-i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + i\hbar \psi(x) \right]$$

$$= \int i\hbar \phi^*(x) \psi(x) = i\hbar \langle \phi | \psi \rangle$$

Como se vale $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \Rightarrow [\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$

Reglas de conmutación para $\vec{R}$ y $\vec{P}$.

$$[R_i, R_j] = 0 \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [R_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

Vemos que esto significa
que no los podemos medir
simultáneamente

Reglas de cuantización:

¿Cómo construir operadores cuánticos?

Habríamos dicho $H_{\text{cuántico}}$ se obtiene de reemplazar cantidades físicas por operadores

Si tenemos $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$

¿Cómo obtenemos $\hat{H}$? ¿Cómo evaluar $V(\vec{r})$?

4.2. Funciones de operadores

CT II.CBII.4

- $F(A) = \sum f_n A^n$
- (ejemplo) $e^A = \sum \frac{A^n}{n!}$
- Si $A|\phi_a\rangle = a|\phi_a\rangle$ entonces $A^n|\phi_a\rangle = a^n|\phi_a\rangle$
- $\therefore F(A)|\phi_a\rangle = \sum f_n a^n|\phi_a\rangle = F(a)|\phi_a\rangle$
- cuando $|\phi_a\rangle$ es un eV de A con ev a entonces $|\phi_a\rangle$ también es eV de $F(A)$ con ev $F(a)$.
- Ojo, hay que tener cuidado con $e^A e^B$, $e^B e^A$, e^{A+B}
- Si $[A, B] = 0$ si son iguales

Vamos a usar
indistintamente
 $F(\hat{A})$ o $F(a)$
↑ operador ↑ escalar

WIKIPEDIA

Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

Teorema relacionado con el álgebra de Lie

$e^X e^Y = e^Z$

con X e Y que pueden ser no conmutativos en el álgebra de Lie de un grupo de Lie. Hay varias formas de escribir la fórmula, pero todas finalmente producen una expresión para Z en términos algebraicos de Lie, es decir, como una serie formal (no necesariamente convergente) en X e Y y conmutadores iterados de los mismos. Los primeros términos de esta serie son:

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots,$$

Formalmente $F(\hat{A}) : \mathcal{OP}_H \rightarrow \mathcal{OP}_H$ y $F(a) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
son funciones distintas pero las usaremos indistintamente si los f_n en su serie son las mismas.

4.5. Ec. de Schrödinger en $|r\rangle$

CT II.CDII.c

$$\blacksquare i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$\blacksquare H = \frac{1}{2m} P^2 + V(R)$$

▪

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle r | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2m} \langle r | P^2 | \psi(t) \rangle + \langle r | V(R) | \psi(t) \rangle$$

En $\{|x\rangle\}$

Ya con esto $H = \frac{P^2}{2m} + V(x) \rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X})$ no depende de t

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \xrightarrow{\text{en la rep. } \{|x\rangle\}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2m} \langle x | P^2 | \psi(t) \rangle + \langle x | V(\hat{X}) | \psi(t) \rangle$$

$|\phi\rangle = P | \psi \rangle$

$$\langle x | P^2 | \psi(t) \rangle = \langle x | P | \phi(t) \rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \phi(x, t) = (-i\hbar)^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x, t)$$

$\uparrow$
 $\langle x | \phi \rangle = \langle x | P | \psi \rangle$

$$\langle x | V(\hat{X}) | \psi(t) \rangle = V(x) \psi(x, t)$$

$\uparrow$ explicar con calma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

esto usando su exp. en serie.