Relación X y P.

- $\hat{\vec{R}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$

1D: $\{|x\rangle\}$ $\quad \hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$

3D: $\{|\vec{r}\rangle\}$ $\quad \hat{X}|(x,y,z)\rangle = x|(x,y,z)\rangle$

$\vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$

$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ $\quad \vec{r} = (x,y,z)$

$\int dx\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$

- $\hat{\vec{P}} = (P_x, P_y, P_z)$

1D: $P_x|p_x\rangle = p_x|p_x\rangle$, $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

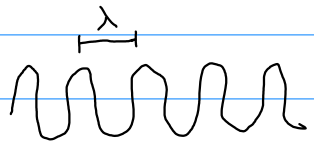
3D: $P_x|\vec{p}\rangle = p_x|\vec{p}\rangle$

- Base de eigenvectores
  - $\langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')$
  - $\int d^3p\, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = \mathbb{1}$

¿Cómo se relacionan $\{|x\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$ o $\hat{X}$ y $\hat{P}$?

La observación de deBroglie

$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \vec{p} = \hbar\vec{k}$ para onda plana



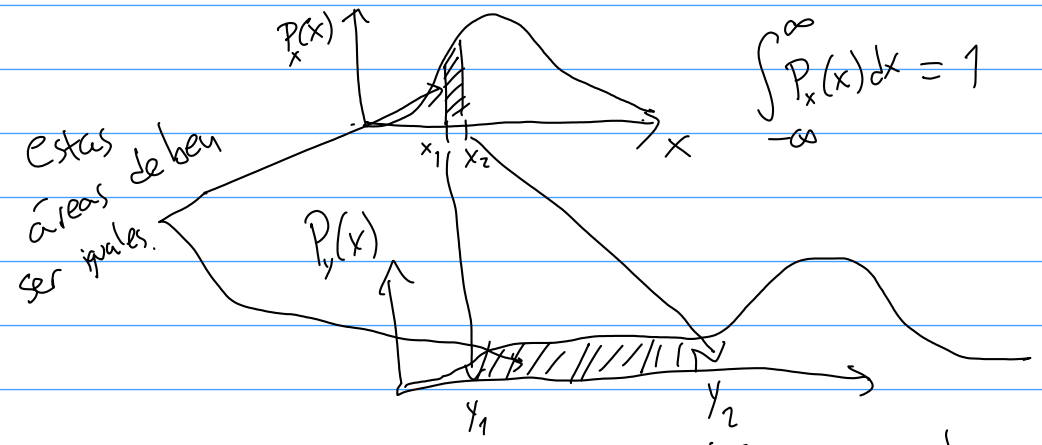
En general, podemos usar la transformada de Fourier para encontrar una relación entre la distribución de posiciones y la distribución de números de onda.

$$\psi_k(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \psi_r(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r$$

$$\vec{r} \xleftrightarrow{\text{Fourier}} \vec{k} \xleftrightarrow{\text{deBroglie}} \vec{p}$$

Hay que tener cuidado al cambiar la variable de una función de densidad de probabilidad. No es correcto sólamente hacer la sustitución $\vec{k} \to \vec{p}/\hbar$

Cambio de variable en una función de densidad de probabilidad:



$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x)\,dx = 1$$

Si la queremos escribir en términos de otra variable $y = y(x)$ para obtener $P_y(y)$.

Se debe cumplir que

$$\int_{x_1}^{x} P_x(x')\,dx' = \int_{x_1}^{x} P_y(y(x'))\,dx'$$

Derivando respecto a x

$$P_x(x) = P_y(y(x))\,\frac{dy}{dx}$$

$$P_x(x) = P_y(y(x))\frac{dy}{dx} \Rightarrow |\psi_k(k)|^2 = |\psi_p(p)|^2 \frac{dp}{dk} \Rightarrow \psi_p(p) = \frac{1}{\hbar^{D/2}}\psi_k\left(\frac{p}{\hbar}\right)$$

dimensión

Usando esto en 1D $p(k) = \hbar k \Rightarrow \psi_k(k) = \psi_p(p)\sqrt{\underbrace{\frac{dp}{dk}}_{\hbar}}$

Ponemos la $\sqrt{\ }$ porque $|\psi_x(x)|^2 = P_x(x)$

$$\psi_k(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi_x(x)\,e^{-ik\cdot x}\,dx \rightarrow \psi_p(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\psi_k\left(\frac{p_x}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \psi_x(x)\,e^{-\frac{ip}{\hbar}x}\,dx$$

$$\psi_p(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\,\psi_r(\vec{r})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (*)$$

$$\psi_p(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int dx\,\psi_x(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{en 1D.}$$

¿Cómo interpretar $\psi_p(\vec{p})$?

La densidad de probabilidad de que la partícula tenga momento $\vec{p}$ es $|\psi_p(\vec{p})|^2 = |\langle p|\psi\rangle|^2$

Reescribiendo (*)

$$\langle \vec{p}\,|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r' \langle \vec{r}\,'|\psi\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\,'}$$

¿Cómo son $\psi_x(x)$ y $\psi_p(p)$ para una partícula con posición perfectamente definida?

e-vector de $\hat{X}$ con e-valor x_0.

para $|\psi\rangle = |x_0\rangle$ Partícula posicionada en x_0

$$\psi_p(p) = \langle p\,|\,x_0\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int dx\, \underbrace{\langle x\,|\,x_0\rangle}_{\delta(x-x_0)} e^{-\frac{i}{\hbar}px} = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar}px_0}$$

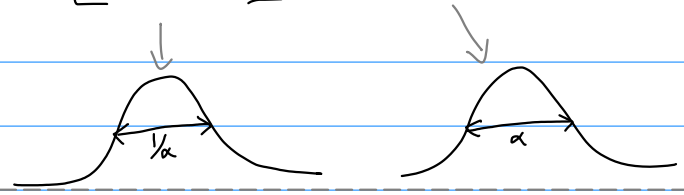
$$dP(p) = |\psi_p(p)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}\underbrace{\cancel{\left|e^{-\frac{i}{\hbar}px_0}\right|^2}}_{1} = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

¡independiente de p!

Por otro lado $\psi(x) = \langle x|x_0\rangle = \delta(x-x_0)$

"Principio de incertidumbre" duración / tiempo

$$\mathcal{F}\mathcal{T}\left[e^{-\frac{1}{2}\alpha t^2}\right] \sim e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}$$



entre más localizado en frecuencia, menos localizado en el tiempo

¿Cuál es el efecto de aplicar $\vec{R}$ y $\vec{P}$ a un vector $|\psi\rangle$?

Aplicar $\hat{X}$ en la base $\{|x\rangle\}$

$\langle x|X = x\langle x|$

$\hat{X}|\psi\rangle$ en la base de posición $\langle x|\hat{X}|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle = x\psi(x)$

Los operadores hermitianos se pueden aplicar a la derecha o izquierda:

$\langle \alpha|A|\beta\rangle = (\langle\beta|A^{+}|\alpha\rangle)^{*} = (\langle\beta|A|\alpha\rangle)^{*}$ | $X|x\rangle = x|x\rangle$, $\langle x|X = x\langle x|$

En 3D $\langle\vec{r}|\hat{X}|\psi\rangle = x\langle\vec{r}|\psi\rangle = x\psi(\vec{r})$

$\langle\vec{r}|\vec{R}|\psi\rangle = \vec{r}\langle\vec{r}|\psi\rangle$

Por ejemplo:

$$\langle\phi|\hat{X}|\psi\rangle = \iint dx\,dx'\,\overbrace{\langle\phi|x'}^{\phi^{*}(x')}\underbrace{\langle x'|\hat{X}|x\rangle}_{x\delta(x-x')}\overbrace{\langle x|\psi\rangle}^{\psi(x)}$$

$$= \int dx\,\phi^{*}(x)\,x\,\psi(x)$$

$$\langle\phi|\hat{X}|\psi\rangle = \int d^3r\,\phi^{*}(\vec{r})\,x\,\psi(\vec{r})$$

Aplicar $\hat{P}$ en la representación $\{|p\rangle\}$

$\hat{P}|\psi\rangle$ en la base de momento

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = p\langle p|\psi\rangle = p\psi(p)$$

Aplicar $\hat{P}$ en la representación $\{|x\rangle\}$.

1D: $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = \int dp \, \langle x|p\rangle\langle p|\hat{P}|\psi\rangle$

$$= (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int dp \; p\,\psi_p(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

Multiplicar por la variable en el espacio de Fourier(p) equivale a calcular la derivada en el espacio x.

$$\therefore \boxed{\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)}$$

Transformada de Fourier de $p_x\psi_p(\mathbf{p})$ es $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
\psi_r(\mathbf{r}) &= (2\pi\hbar)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
\frac{\partial}{\partial x}\psi_r(\mathbf{r}) &= (2\pi\hbar)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial x}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
&= (2\pi\hbar)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right) \\
&= (2\pi\hbar)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})\left(\frac{i}{\hbar}p_x e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right) \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{i}{\hbar}p_x\psi_p(\mathbf{p})\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi_r(\mathbf{r}) = \mathcal{F}(p_x\psi_p(\mathbf{p}))$$

3D: $$\boxed{\begin{aligned}\langle \vec{r}|\vec{P}|\psi\rangle &= -i\hbar\nabla\langle\vec{r}|\psi\rangle \\ &= -i\hbar\nabla\psi(\vec{r})\end{aligned}}$$