

Postulados de Mecánica Cuántica

2.3. Postulados de la Mecánica Cuántica

Cohen-Tannoudji III.B

es un rayo

1. El estado de un sistema físico está definido al especificar un ket (vector) $|\psi(t_0)\rangle \in \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial, esto implica el principio de superposición: una combinación lineal de vectores estados es un vector de estado. (en la práctica tomamos un normalizado)
Estos vectores pueden ser de dimensión infinita. No tienen que ver con los vectores en el espacio geométrico de 3 dimensiones en el que vivimos.
2. Toda cantidad medible se describe por un operador $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que es **Hermitiano**; a esto se le llama un observable.
3. El único posible resultado de la medición de una cantidad física observable A es uno de los eigenvalores de A .
 - Los eigenvalores de un operador Hermitiano siempre son reales.
 - Si el espectro de A es discreto los resultados que podemos obtener están cuantizados.
4. El siguiente postulado tiene distintas formas dependiendo del espectro de A
 - (Espectro de A discreto y no degenerado) Considerando un ket $|\psi\rangle$ normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) y un operador A con espectro discreto $A|e_i\rangle = a_i|e_i\rangle$ donde todos los eigenvalores son distintos y los eigenvectores están normalizados. Entonces podemos escribir

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$$

entonces la probabilidad de obtener el resultado a_i en una medición es

$$\mathcal{P}(a_i) = |\langle e_i|\psi\rangle|^2 = |c_i|^2$$

espectro discreto
y no degenerado

|||||

4.1

Observable A con $A|e_i\rangle = a_i|e_i\rangle$

Para $|\psi\rangle = c_1|e_1\rangle + c_2|e_2\rangle + \dots + c_n|e_n\rangle$
la probabilidad de obtener a_i es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_i) &= |c_i|^2 = |\langle e_i|\psi\rangle|^2 \\ &= \langle\psi|e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle = \langle\psi|P_{|e_i\rangle}|\psi\rangle \end{aligned}$$

proyección
a un estado.

4.2 Espectro discreto y degenerado

Algunos e-vals de A se repiten. Es decir a varios e-vectores ortonormales $|e_i^n\rangle$ con $n=1,2,\dots,g_i$ les corresponde este e-valor.
de e.V. que comparten el e.v. i
no depende de n.

$$A|e_i^n\rangle = a_i |e_i^n\rangle$$

Aún podemos escribir a $|\psi\rangle$ en esta base.

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle$$

En este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_i) &= \sum_{n=1}^{g_i} |c_i^n|^2 = \sum_{n=1}^{g_i} |\langle e_i^n | \psi \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{g_i} \langle \psi | e_i^n \rangle \langle e_i^n | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left(\sum_{n=1}^{g_i} |e_i^n\rangle \langle e_i^n| \right) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | P_i | \psi \rangle \end{aligned}$$

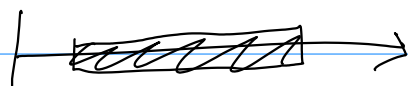
proyector a eigensubespacio de a_i

4.3 Espectros continuos no degenerados

$$A|v_\alpha\rangle = \alpha |v_\alpha\rangle ; |\psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |v_\alpha\rangle$$

espectro

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$



Los resultados posibles son un continuo. Así, lo que nos interesa es una densidad de probabilidad.

Probabilidad de obtener resultado entre α y $\alpha+d\alpha$

$$dP(\alpha) = \underbrace{|\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2}_{\text{densidad de probabilidad}} d\alpha$$

Probabilidad de obtener valor entre α_1 y α_2 .

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dP(\alpha)$$

- la probabilidad de obtener un valor específico siempre es cero. $P(\alpha, \alpha) = 0$

⑤ Colapso de la función de onda (caso no degenerado)

Si medimos y obtenemos α_i y volvemos a medir inmediatamente después obtenemos el mismo resultado

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle \xrightarrow{\text{antes}} |\psi'\rangle = |e_i\rangle \xrightarrow{\text{después}}$$

- Así podemos preparar estados.
- Efecto cuántico de Zenón:
- El proceso de medición no depende de un observador consciente.
Es más un efecto de sistema chico interactuando con sistema grande.

(caso degenerado)

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \frac{\sum_{n=1}^{g_i} c_i^n |e_i^n\rangle}{\sqrt{\sum_{n=1}^{g_i} |c_i^n|^2}}$$

$$= \frac{P_i |\psi\rangle}{\text{Su norma}}$$

⑥ Evolución temporal

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Hamiltoniano H se obtiene del clásico reemplazando cantidades físicas por operadores.

Resumen

- 1) Estados son kets normalizados en $\mathcal{H}$
- 2) Los observables son operadores $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
- 3) Los resultados posibles de medir $\hat{A}$ son sus e-valores
- 4) Para $\hat{A}|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$, la probabilidad de obtener λ_i cuando el sistema está en el edo. $|\psi\rangle$ es:
 - $\mathcal{P}(\lambda_i) = |\langle e_i | \psi \rangle|^2$ (espectro discreto y no degenerado)
 - $\mathcal{P}(\lambda_i) = \langle \psi | P_{\lambda_i} | \psi \rangle$ (en general)

$\uparrow$ projector hacia e-espacio de λ_i .

5) Colapso de la función de onda

- Espectro discreto, no degenerado:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |e_j\rangle \xrightarrow[\lambda_i \text{ como resultado}]{\text{medir y obtener}} |\psi'\rangle = |e_i\rangle$$

- En general:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\lambda_i \text{ como resultado}]{\text{medir y obtener}} |\psi'\rangle = \frac{P_{\lambda_i} |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_{\lambda_i} | \psi \rangle}}$$

6) Evolución temporal

$\downarrow$ operador hamiltoniano

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Cuando se puede $\hat{H}$ sale del $\mathcal{H}$ clásico.

Para una partícula en un potencial

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{R})$$

¿Cómo son los operadores $\hat{p}$ y $\hat{R}$?