

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$



Teorema 1: Para un operador hermitiano $\hat{A}$

- 1) Sus eigenvalores son reales
- 2) Los e-vectores que corresponden a distinto e-valor son ortogonales.

Teorema espectral:

Theorem — If A is Hermitian on V , then there exists an **orthonormal basis** of V consisting of eigenvectors of A . Each eigenvalue of A is real.

(no lo probaremos)

• Si $\mathcal{B} = \{ |e_i\rangle : i \in I \}$ es una base de e-vectores de $\hat{A}$

• Aplicar $\hat{A}$ en esta base es más sencillo

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \hat{A}\left(\sum c_i |e_i\rangle\right) = \sum c_i \hat{A}|e_i\rangle = \sum c_i \lambda_i |e_i\rangle$$

$\uparrow$ $|\alpha\rangle = \sum c_i |e_i\rangle$
 $\nearrow$

Comparen con el resultado para base ortonormal cualquiera $\hat{A}|\alpha\rangle = \sum_{i,j} A_{ij} \alpha_j |u_i\rangle$

¿Cómo encontrar e-valores y e-vectores?

Empezamos con una base cualquiera $\mathcal{B} = \{|u_i\rangle\}$
(no de e-vectores)

Para un e-vector $|\psi\rangle$ de $\hat{A}$

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad \langle u_i|\psi\rangle = c_i \quad [|\psi\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

↑
aplicando $\langle u_i|$ por izq.

$$\langle u_i|\hat{A}|\psi\rangle = \lambda\langle u_i|\psi\rangle \Rightarrow \sum_j \langle u_i|\hat{A}|u_j\rangle \langle u_j|\psi\rangle = \lambda\langle u_i|\psi\rangle$$

$\uparrow \mathbb{1} = \sum_j |u_j\rangle\langle u_j|$

$$\Rightarrow \sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i$$

$$(\hat{A} - \lambda \mathbb{1})|\psi\rangle = 0 \quad \leftarrow \Rightarrow \sum_j \underline{(A_{ij} - \delta_{ij}\lambda)} c_j = 0$$

Es un sistema de ecuaciones con c_j y λ
de incógnitas. (una incógnita más que eqs.).

Tiene solución no trivial ^(no todo cero) si $\det[\hat{A} - \lambda \mathbb{1}] = 0$

La ecuación faltante.

Diagonalización por fuerza bruta:

1) Obtener λ_i como las raíces de $\det(\hat{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$

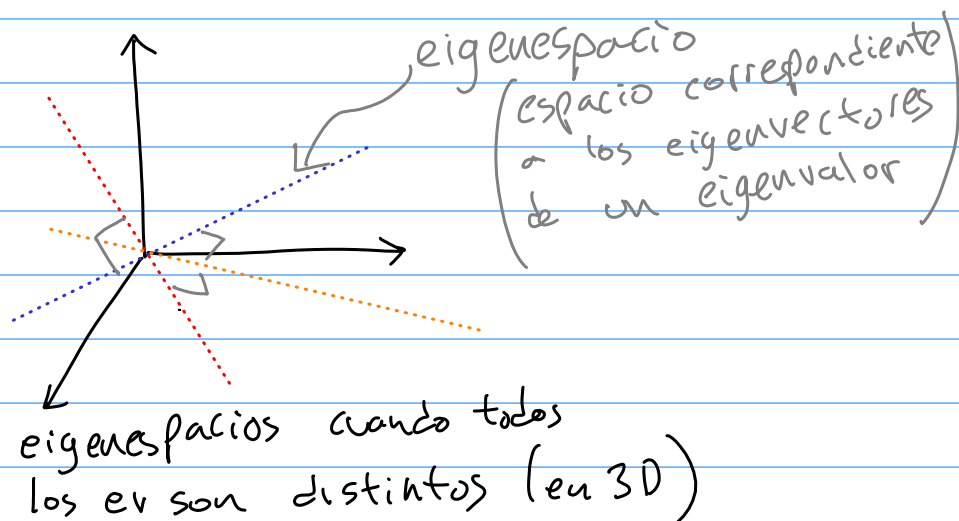
2) Para cada λ_i resolver

$$\hat{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} N \text{ eqs} \\ N \text{ incógnitas} \end{array}$$

A cada vector propio le corresponde
1 valor propio

A cada valor propio le pueden corresponder
muchos vectores propios (no paralelos). En este
caso se dice que el e-valor está degenerado.

- Si todos los e.v. son distintos a cada uno le
corresponde un rayo ortogonal.



- Si los eigenvalores son todos distintos
podemos hacer una base de eigenvectores.

Ojo: La elección de base de vectores no es única

- Si hay e-valores repetidos

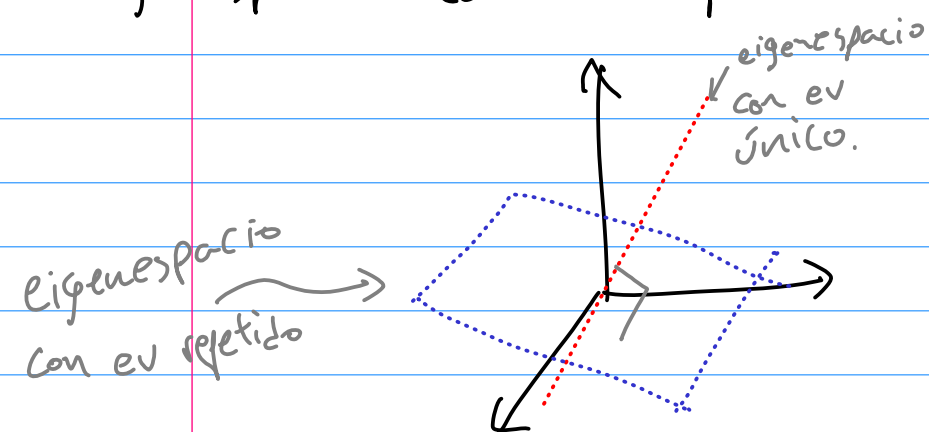
Si dos e-vectores distintos comparten e-valor, cualquier combinación lineal de ellos es e-vector.

$$\hat{A}|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \quad \hat{A}|\beta\rangle = a|\beta\rangle$$

$$\hat{A}(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle) = a(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle)$$

$\therefore |\alpha\rangle + c|\beta\rangle$ es e.V. de $\hat{A}$ con e.v. a .

Eigeneespacios con e.v. repetidos



De todas formas podemos tener una base de e.V. pero ahora hay más libertad para escogerla.

Postulados de mecánica clásica

$$S[q] = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

A path $q \in \mathcal{P}(a, b, x_a, x_b)$ is a **stationary point** of S if and only if

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- El estado de un sistema a un tiempo t_0 está dado por $2N$ coordenadas generalizadas.

N pos $q_i(t_0)$ y N momentos $\dot{q}_i(t_0)$

- Cualquier propiedad del sistema depende el estado. Se puede predecir con certeza el resultado de una medición si se conoce el estado.

La evolución temporal está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange y queda determinada al especificar las condiciones iniciales. Es decir, al definir las condiciones iniciales se determina el estado del sistema a todo tiempo.

Postulados de Mecánica Cuántica

2.3. Postulados de la Mecánica Cuántica

Cohen-Tannoudji III.B

es un rayo

1. El estado de un sistema físico está definido al especificar un ket (vector) $|\psi(t_0)\rangle \in \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial, esto implica el principio de superposición: una combinación lineal de vectores estados es un vector de estado. (en la práctica tomamos un normalizado)
Estos vectores pueden ser de dimensión infinita. No tienen que ver con los vectores en el espacio geométrico de 3 dimensiones en el que vivimos.
2. Toda cantidad medible se describe por un operador $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que es **Hermitiano**; a esto se le llama un observable.
3. El único posible resultado de la medición de una cantidad física observable A es uno de los eigenvalores de A .
 - Los eigenvalores de un operador Hermitiano siempre son reales.
 - Si el espectro de A es discreto los resultados que podemos obtener están cuantizados.
4. El siguiente postulado tiene distintas formas dependiendo del espectro de A
 - (Espectro de A discreto y no degenerado) Considerando un ket $|\psi\rangle$ normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) y un operador A con espectro discreto $A|e_i\rangle = a_i|e_i\rangle$ donde todos los eigenvalores son distintos y los eigenvectores están normalizados. Entonces podemos escribir

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$$

entonces la probabilidad de obtener el resultado a_i en una medición es

$$P(a_i) = |\langle e_i | \psi \rangle|^2 = |c_i|^2$$