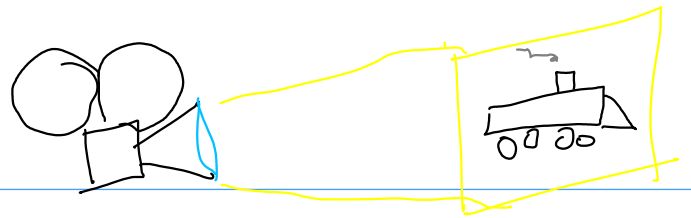


Proyectores



- hacia un vector

Son operadores que proyectan un vector hacia una dirección

Si $|\psi\rangle$ está normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle=1$)

$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es el proyector hacia $|\psi\rangle$

Al aplicarlo $P_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\phi\rangle}_{\text{escalar}}$
proyecta a $|\phi\rangle$ en la dir $|\psi\rangle$

- Notemos que $P_\psi^2 = P_\psi$ ($|\psi\rangle\langle\psi||\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|$)
i.e. proyectar 2 veces es lo mismo que una

- hacia un subespacio

En un espacio con base ortonormal $\{|u_i\rangle: i=1, \dots, N\}$
tomamos q vectores ($q \leq N$)

$$|u_1\rangle, \dots, |u_q\rangle$$

E_q espacio generado por los q vectores

$$P_q = \sum_{i=1}^q |u_i\rangle\langle u_i|$$

- De nuevo $P_q^2 = P_q$ (inténtenlo).

$$P_q|\psi\rangle = \sum_{i=1}^q |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle$$

Vectores y valores propios (eigenvectores y eigenvalores)

Les había dicho que en gral $A|\psi\rangle \neq c|\psi\rangle$

arbitrario
↓
escalar.

Algunos operadores tienen vectores especiales (propios) $\{|e_i\rangle\}$ que sí cumplen

$$\hat{A}|e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \quad \left(\begin{array}{l} \text{los e.v.} \\ \text{deben ser } \neq 0 \end{array} \right)$$

e.v. e.v.

- Al conjunto de e.v. se le llama espectro 

Si $|e\rangle$ es e.v. de $\hat{A}$ entonces $c|e\rangle$ también es e.v.

Los e.v. son rayos

$$\hat{A}(c|e_i\rangle) = \lambda_i (c|e_i\rangle)$$

- ¿Qué operadores tienen e.v.?

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

Teorema 1: Para un operador hermitiano $\hat{A}$

- 1) Sus eigenvalores son reales
- 2) Los e-vectores que corresponden a distinto e-valor son ortogonales.

Sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ e-vectores ($\neq 0$) de $\hat{A}$ con e-valor a, b .

$$\hat{A}|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \quad \hat{A}|\beta\rangle = b|\beta\rangle \Rightarrow \langle\beta|\hat{A}^\dagger = b^*\langle\beta|$$

Multipliquemos por $\langle\beta|$ y restándolas.

$$\langle \beta | \hat{A} | \alpha \rangle = a \langle \beta | \alpha \rangle$$

$$\langle \beta | \hat{A} | \alpha \rangle = b^* \langle \beta | \alpha \rangle$$

$$(a - b^*) \langle \beta | \alpha \rangle = 0$$

• Si $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$, $b = a \Rightarrow (a - a^*) \langle \alpha | \alpha \rangle = 0$
 $\Rightarrow a = a^* \checkmark$

• Si $a \neq b \Rightarrow \langle \beta | \alpha \rangle = 0 \checkmark$

Teorema espectral:

Theorem — If A is Hermitian on V , then there exists an **orthonormal basis** of V consisting of eigenvectors of A . Each eigenvalue of A is real.

(no lo probaremos)

• Si todos los e-valores son distintos, el teorema espectral es claro por el teorema 1.

• Como los e-vectores se pueden multiplicar por escalares y siguen siendo e-vector, para la base elegimos e-vectores normalizados.

• Si $\mathcal{B} = \{ |e_i\rangle : i \in I \}$ es una base de e-vectores de $\hat{A}$

• Aplicar $\hat{A}$ en esta base es más sencillo

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \hat{A}\left(\sum c_i |e_i\rangle\right) = \sum c_i \hat{A}|e_i\rangle = \sum c_i \lambda_i |e_i\rangle$$

$\uparrow$
 $|\alpha\rangle = \sum c_i |e_i\rangle$

Comparen con el resultado para base ortonormal cualquiera

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \sum_{i,j} A_{ij} \alpha_j |u_i\rangle$$