Mecánica Cuántica

Semestre 2025-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Edgar Giovanni Alonso Torres

Ayud: Alberto Hernández López

Tarea 5
Entrega: 04/06/2025

Ejercicio 1: Valores esperados de para $j = 1$ **2 pts**

Considera un sistema con momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está generado por la base $\{|1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de eigenvectores comunes a J^2 y J_z de la forma $|j, m\rangle$. Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1, 1\rangle + \beta\,|1, 0\rangle + \gamma\,|1, -1\rangle\,,$$

con α, β y γ números complejos:

a Calcula el valor esperado $\left\langle \vec{J} \right\rangle = (\langle J_x\rangle, \langle J_y\rangle, \langle J_z\rangle)$ en términos de α, β y γ.

b Encuentra una expresión para los valores esperados $\left\langle J_y^2 \right\rangle$ y $\left\langle J_z^2 \right\rangle$ en términos de α, β y γ.

Ejercicio 2: Cambio de eje de cuantización **1 pts**

Considera un sistema físico arbitrario cuyo espacio de estados de 4 dimensiones se genera por los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z para $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$.

a Escribe los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z, $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$. Aquí no tienes que hacer ningún cálculo, sólo hace falta que los enlistes.

b Escribe los eigenvectores comunes a J^2 y J_x denotados por $|j, m_x\rangle$ en términos de los $|j, m_z\rangle$. Para hacer esto escribe a J_x como matriz en la base que escribiste en el inciso anterior. Al diagonalizar esta matriz encontrarás los eigenvecotres de J_x en términos de los eigenvectores de J_z. ¿Cuáles son los eigenvaores de J_x?
(Puedes auxiliarte de una computadora para diagonalizar)

Ejercicio 3: Estado de un espín **2 pts**

En clase hablamos acerca del operador asociado al observable de espín $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde, en la base de eigenvectores de S^2 y S_z denotados por

$$\{|s = 1/2, m_s = 1/2\rangle = |+\rangle, |s = 1/2, m_s = -1/2\rangle = |-\rangle\},$$

las representaciones matriciales de las componentes son

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos operadores podemos obtener el observable de espín en una dirección arbitraria $\vec{u}$ determinada por los ángulos θ y φ por medio de

$$\vec{S} \cdot \vec{u} = S_u = S_x \sin\theta \cos\varphi + S_y \sin\theta \sin\varphi + S_z \cos\theta$$

Muestra que

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$
$$|-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$

son los eigenvectores de S_u.

Ejercicio 4: Desviación RMS en momento angular **1 pts**

Considerando un eigenestado de momento angular arbitrario $|\ell, m\rangle$. Encuentra: $\langle L_x \rangle$, $\langle L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, ΔL_x, ΔL_z.

Observa la estructura de las ecuaciones antes de hacer cálculos innecesarios.

Ejercicio 5: Operadores escalera de momento angular **1 pts**

En clase encontramos que los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ con $m = \ell$ tienen la forma

$$Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = N \sin^\ell \theta e^{i\ell\varphi},$$

donde N es una constante de normalización.

a. Calcula N para el caso $\ell = 1$.

b. Usa L_- para obtener $Y_1^0(\theta, \varphi)$ y $Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$ a partir de $Y_1^1(\theta, \varphi)$.

Ejercicio 6: Atomo hidrogenoide **1 pts**

a. Enlista todos los estados $|n, l, m\rangle$ con $n = 4$.

b. Grafica todas funciones radiales distintas para el átomo hidrogenoide con $n = 4$.

Ejercicio 7: Valores esperados para átomo hidrogenoide **1 pts**

Para un átomo hidrogenoide en el estado $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$ calcula:

a. El valor esperado $\langle r \rangle$. Además de encontrar una expresión simbólica, calcula su valor en metros.

b. El radio con máxima densidad de probabilidad de encontrar al electrón (Ojo: recuerda que las funciones de onda calculadas están en coordenadas esféricas y para integrarlas se requiere el elemento de volumen adecuado)

Teoría de perturbaciones

Ejercicio 8: Oscilador anarmónico **2 pts**

Considera el hamiltoniano de oscilador armónico

$$H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

con eigenvalores $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ y eigenvectores $|\phi_n\rangle$. Este oscilador está sometido a una perturbación de la forma

$$W = \lambda\hbar\omega X^3 \Big(\frac{m\omega}{\hbar}\Big)^{3/2}.$$

a) Escribe W en términos de a y $a^\dagger$ y $N = a^\dagger a$.

b) Encuentra cuáles elementos de matriz $\langle\phi_i|W|\phi_j\rangle$ de W son distintos de cero.

c) Para el nivel n, calcula la corrección de la energía hasta segundo orden en λ debido a esta perturbación.

d) Calcula la corrección a primer orden en λ para el eigenvector $|\phi_n\rangle$.

Ejercicio 9: Sistema de dos niveles **1 pts**

Considerar el hamiltoniano H_0 y la perturbación W dados por

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \qquad W = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Responda las siguientes preguntas (puedes auxiliarte con la computadora):

a) ¿Cuáles son los eigenvalores y egienvecotres de H_0?

b) ¿Cuáles son los eigenvalores de $H_0 + W$ de acuerdo a la teoría de perturbaciones de primer y segundo orden?

c) ¿Cuáles son los eigenvalores exactos de $H_0 + W$?

d) Graficar **por computadora** los eigenvalores obtenidos en los incisos anteriores en función de Δ para distintos valores reales de Ω de tal forma que sea fácil comprar la solución exacta y la de teoría de perturbaciones (i.e. ponlas en la misma gráfica). ¿En qué región la solución por teoría de perturbaciones se aproxima bien a la solución exacta?