Recapitulación

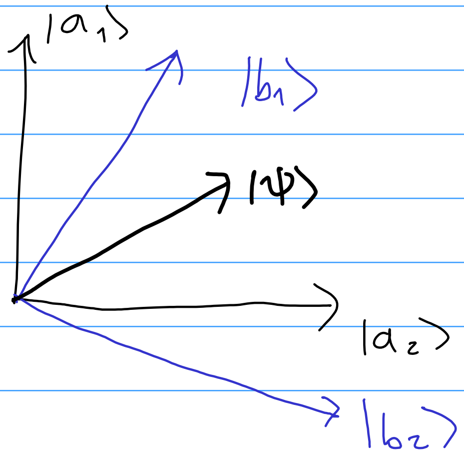
$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \iff \exists$ base común de e-vectores de $\hat{A}$ y $\hat{B}$. (Se pueden diagonalizar simultáneamente) CT II.D-3.a

- Si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, medir $\hat{A}$ no borra info de $\hat{B}$ ni viceversa. (medidas compatibles)

$$\mathcal{P}(a_n, b_p) = \mathcal{P}(b_p, a_n) = \sum_i |c_{n,p,i}|^2 = \sum_i |\langle a_n, b_p, i|\psi\rangle|^2$$

- Si $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ medidas incompatibles.

Explicar esto con un dibujo

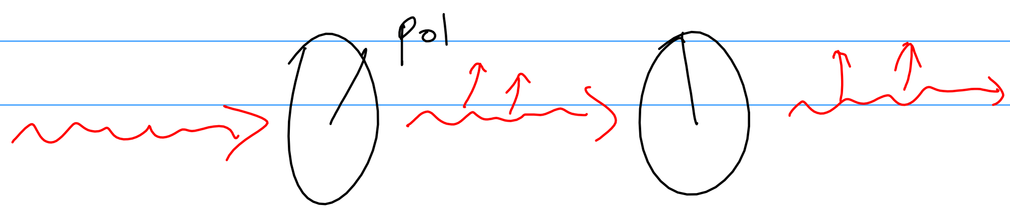


, $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$
$\hat{B}|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$

Al medir $\hat{A}$ se proyecta hacia $|a_1\rangle$ ó $|a_2\rangle$.

Cuando $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, Las bases no coinciden.

Ejemplo familiar: polarización.



Ejemplos

$[R_i, R_j] = 0 \qquad [P_i, P_j] = 0 \qquad [R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$

$|x, y, z\rangle \qquad |P_x, P_y, P_z\rangle \qquad |x, P_y, z\rangle$

$|x, y, P_z\rangle$

Conjuntos Completos de Operadores que Conmutan

Hablamos de $\hat{E} = +(|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|) - (|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|)$

$$\hat{T} = +(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) - (|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)$$

Partiendo de $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle + d|3\rangle$

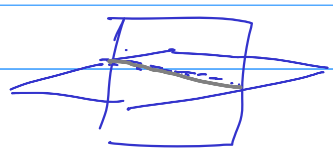
Al medir $\hat{E}$ y obtener $+1$

$$|\psi'\rangle = \frac{a|0\rangle + c|2\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |c|^2}}$$

Esto aún no determina por completo el estado pues aún podemos medir un observable que conmuta con $\hat{E}$ sin saber qué va a salir.

Medir $\hat{E}$ sólo proyecta a un espacio 2D

Si medimos $\hat{T}$ se termina de definir el estado



By definition, a set of observables A, B, C... is called a complete set of commuting observables if

(*i*) *all the observables A, B, C... commute by pairs,*

(*ii*) *specifying the eigenvalues of all the operators A, B, C... determines a unique* (to within a multiplicative factor) *common eigenvector.*

An equivalent way of saying this is the following:
A set of observables A, B, C... is a complete set of commuting observables if there exists a unique orthonormal basis of common eigenvectors (to within phase factors).

C.S.C.O.'s play an important role in quantum mechanics. We shall see numerous examples of them (see, in particular, § E-2-d).

$\{\hat{T}\}$ y $\{\hat{E}\}$ no son CCOC pero $\{\hat{T},\hat{E}\}$ sí.

Otro ejemplo $A = 4|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2| + 3|3\rangle\langle 3|$

$\{A\}$ es un CCOC

- Medir los observables de un CCOC determina por completo el estado del sistema.

En 1D $\{\hat{X}\}$ es un CCOC pero en 3D no.

$\{\hat{X},\hat{Y},\hat{Z}\}$, $\{P_x,P_y,P_z\}$ $\{\hat{X},\hat{P}_y,\hat{P}_z\}$, $\{\hat{X},\hat{Y},\hat{P}_z\}$ etc...

El proyector como observable

Como $P_{|\psi\rangle} = P^{\dagger}_{|\psi\rangle}$ podemos tomarlo como observable.

Considerando una base ortonormal $\{|u_i\rangle : i \in I\}$

¿Cuáles son los e-valores y e-vectores de

$$P_{|u_n\rangle} = |u_n\rangle\langle u_n|$$

$$P_{|u_n\rangle}|u_n\rangle = |u_n\rangle \qquad P_{|u_n\rangle}\underset{i\neq n}{|u_i\rangle} = |u_n\rangle\langle u_n|u_i\rangle = 0$$

$$[P_{|u_n\rangle}]_{\{|u_i\rangle\}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Para $|\psi\rangle = \sum c_n|u_n\rangle$

$$\mathcal{P}(1) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2$$

El proyector $P_{|u_n\rangle}$ es un observable que mide si el sistema está o no en el estado $|u_n\rangle$.