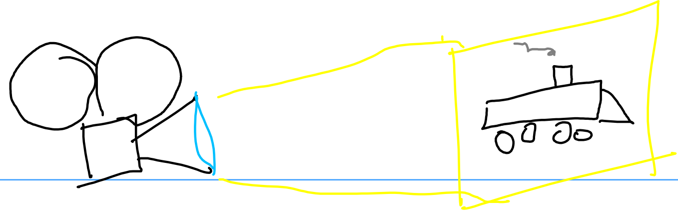
Proyectores



- hacia un vector

Son operadores que proyectan un vector hacia una dirección

Si $|\psi\rangle$ está normalizado $\left(\langle\psi|\psi\rangle = 1 \right)$

$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es el proyector hacia $|\psi\rangle$

Al aplicarlo $P_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\overbrace{\langle\psi|\phi\rangle}^{\text{escalar}}$
proyecta a $|\phi\rangle$ en la dir $|\psi\rangle$

- Notemos que $P_\psi^2 = P_\psi$ $\left(|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = \dots \right)$
i.e. proyectar 2 veces es lo mismo que una

- hacia un subespacio

En un espacio con base ortonormal $\{|u_i\rangle : i=1,\dots,N\}$
tomamos q vectores $(q \leq N)$

$$|u_1\rangle, \dots, |u_q\rangle$$

$\mathcal{E}_q$ espacio generado por los q vectores

$$P_q = \sum_{i=1}^{q} |u_i\rangle\langle u_i|$$

- De nuevo $P_q^2 = P_q$ (inténtenlo).

$$P_q|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{q} |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle$$

Si $|\psi\rangle$ tiene componentes fuera de $\mathcal{E}_q$, aplicar P_q las quita.

Ejemplo de proyector

Base ortonormal $\{|\star\rangle, |@\rangle, |Z\rangle\}$

$$|\psi\rangle = a|\star\rangle + b|@\rangle + c|Z\rangle$$

$$\hat{P} = |\star\rangle\langle\star| + |@\rangle\langle @|$$

$\langle\star|Z\rangle = 0$

$\langle @|Z\rangle = 0$

$$\hat{P}|\psi\rangle = a|\star\rangle + b|@\rangle$$

pues $|\star\rangle\langle\star|\star\rangle = |\star\rangle$

$|@\rangle\langle @|@\rangle = |@\rangle$

Vectores y valores propios (eigenvectores y eigenvalores)

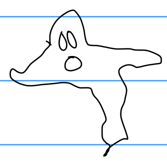
Les había dicho que en gral $\underbrace{A}_{\text{arbitrario}}|\psi\rangle \neq \underbrace{c}_{\text{escalar.}}|\psi\rangle$

Algunos operadores tienen vectores especiales (propios) $\{|e_i\rangle\}$ que sí cumplen

$$\hat{A}|e_i\rangle = \underbrace{\lambda_i}_{\text{e.v.}}\underbrace{|e_i\rangle}_{\text{e.V.}}$$

(los e.V. deben ser $\neq 0$)

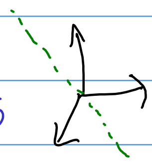
- Al conjunto de e.v. se le llama espectro



Si $|e\rangle$ es eV de $\hat{A}$ entonces $c|e\rangle$ también es e.V.

$\hat{A}c|e_i\rangle = \lambda_i c|e_i\rangle$

Los e.V. son rayos



- ¿Qué operadores tienen e.V.?

$\hat{A} = \hat{A}^{+}$

Teorema 1: Para un operador hermitiano $\hat{A}$

1) Sus eigenvalores son reales
2) Los e-vectores que corresponden a distinto e-valor son ortogonales.

Sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ $(\neq 0)$ e-vectores de $\hat{A}$ con e-valor a, b.

$$\hat{A}|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \qquad \hat{A}|\beta\rangle = b|\beta\rangle \Rightarrow \langle\beta|\hat{A}^{+} = b^{*}\langle\beta|$$

$\langle\beta|$ $\quad$ $|\alpha\rangle$ $\qquad\qquad$ $\langle\beta|\hat{A} = b^{*}\langle\beta|$

multiplicamos por y restándolas.

$$\langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle = a\langle\beta|\alpha\rangle \qquad \langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle = b^{*}\langle\beta|\alpha\rangle$$

$$(a - b^{*})\langle\beta|\alpha\rangle = 0$$

- Si $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$, $b = a$ $\Rightarrow (a - a^{*})\langle\alpha|\alpha\rangle = 0$
  $\Rightarrow a = a^{*}$ ✓

- Si $a \neq b \Rightarrow \langle\beta|\alpha\rangle = 0$ ✓

Teorema espectral:

Theorem — If A is Hermitian on V, then there exists an orthonormal basis of V consisting of eigenvectors of A. Each eigenvalue of A is real.

(no lo probaremos)

- Si todos los e-valores son distintos, el teorema espectral es claro por el teorema 1.

- Como los e-vectores se pueden multiplicar por escalares y siguen siendo e-vector, para la base elegimos e-vectores normalizados.

- Si $\gamma' = \{ |e_i\rangle : i \in I \}$ es una base de evectores de $\hat{A}$

- Aplicar $\hat{A}$ en esta base es más sencillo

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \hat{A}\left(\sum c_i |e_i\rangle\right) = \sum c_i \hat{A}|e_i\rangle = \sum c_i \lambda_i |e_i\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \sum c_i |e_i\rangle$$

Comparen con el resultado para base ortonormal cualquiera $\hat{A}|\alpha\rangle = \sum_{i,j} A_{ij} \alpha_j |u_i\rangle$

¿Cómo encontrar e-valores y e-vectores?

Empezamos con una base cualquiera $\gamma' = \{|u_i\rangle\}$ (no de e-vectores)

Para un e-vector $|\psi\rangle$ de $\hat{A}$

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \qquad \langle u_i|\psi\rangle = c_i \qquad [|\psi\rangle]_{\gamma'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

aplicando $\langle u_i|$ por izq.

$$\langle u_i|\hat{A}|\psi\rangle = \lambda \langle u_i|\psi\rangle \Rightarrow \sum_j \langle u_i|\hat{A}|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = \lambda\langle u_i|\psi\rangle$$

$$\mathbb{1} = \sum_j |u_j\rangle\langle u_j|$$

$$\Rightarrow \sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i$$

$$(\hat{A} - \lambda \mathbb{1})|\psi\rangle = 0 \longleftarrow \Rightarrow \sum_j (A_{ij} - \delta_{ij}\lambda) c_j = 0$$

Es un sistema de ecuaciones con c_j y λ de incógnitas. (una incógnita más que eqs.)

• Tiene solución $\underbrace{\text{no trivial}}_{}$ si $\det[\hat{A}-\lambda\mathbb{1}]=0$

(no todo cero)

La ecuación faltante.

Diagonalización por fuerza bruta:

1) Obtener λ_i como las raíces de $\det(\hat{A}-\lambda\mathbb{1})=0$

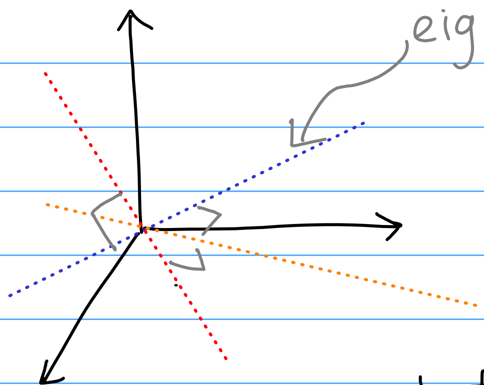
2) Para cada λ_i resolver

$$\hat{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$ N eqs, N incógnitas

A cada vector propio le corresponde 1 valor propio

A cada valor propio le pueden corresponder muchos vectores propios (no paralelos). En este caso se dice que el e-valor está degenerado.

- Si todos los e.v. son distintos a cada uno le corresponde un rayo ortogonal.



eigenespacio

(espacio correspondiente a los eigenvectores de un eigenvalor)

eigenespacios cuando todos los ev son distintos (en 3D)

– Si los eigenvalores son todos distintos podemos hacer una base de eigenvectores.

Ojo: La elección de base de evectores no es única

Con una base de e.V. podemos representar a un operador $\hat{A}$ como

$$\hat{A} = \sum \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}|e_j\rangle = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle \overbrace{\langle e_i|e_j\rangle}^{\delta_{ij}} = \lambda_j |e_j\rangle$$

En contraste para una base ortonormal cualquiera

$$A = \sum_{ij} A_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|$$ no es diagonal necesariamente

– Si hay e-valores repetidos

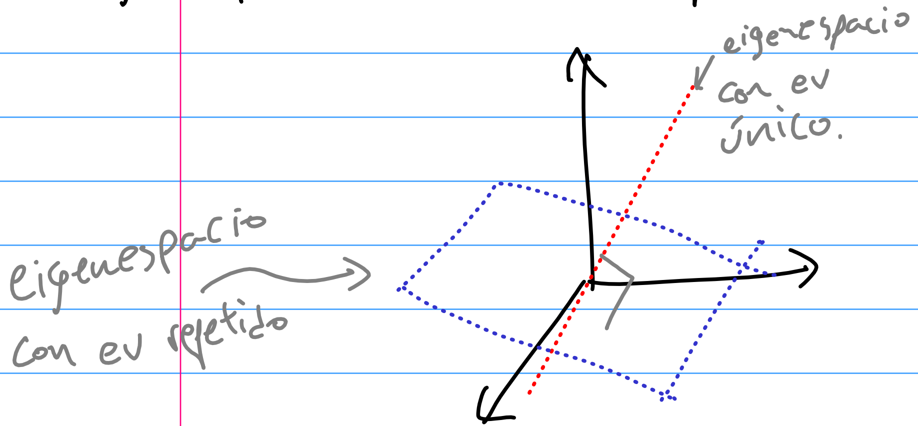
Si dos e-vectores distintos comparten e-valor, cualquier combinación lineal de ellos es e-vector.

$$\hat{A}|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \qquad \hat{A}|\beta\rangle = a|\beta\rangle$$

$$\hat{A}\left(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle\right) = a\left(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle\right)$$

$\therefore$ $|\alpha\rangle + c|\beta\rangle$ es e.V. de $\hat{A}$ con e.v. a.

Eigenespacios con e.v. repetidos



De todas formas podemos tener una base de e.V. pero ahora hay más libertad para escogerla.