Mecánica Cuántica

Semestre 2024-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea-Examen 4
Entrega: 13/05/2024

Ejercicio 1: Valores esperados de para $j = 1$ **1 pts**

Considera un sistema con momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está generado por la base $\{|1,+1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ de eigenvectores comunes a J^2 y J_z de la forma $|j,m\rangle$. Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1,1\rangle + \beta\,|1,0\rangle + \gamma\,|1,-1\rangle\,,$$

con α, β y γ números complejos:

a Calcula el valor esperado $\left\langle \vec{J} \right\rangle$ en términos de α, β y γ.

b Encuentra una expresión para los valores esperados $\langle J_y^2 \rangle$ y $\langle J_z^2 \rangle$ en términos de α, β y γ.

Ejercicio 2: Cambio de eje de cuantización **2 pts**

Considera un sistema físico arbitrario cuyo espacio de estados de 4 dimensiones se genera por los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z para $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$.

a Escribe los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z, $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$. Aquí no tienes que hacer ningún cálculo, sólo hace falta que los enlistes.

b Escribe los eigenvectores comunes a J^2 y J_x denotados por $|j, m_x\rangle$ en términos de los $|j, m_z\rangle$. Para hacer esto escribe a J_x como matriz en la base que escribiste en el inciso anterior. Al diagonalizar esta matriz encontrarás los eigenvecotres de J_x en términos de los eigenvectores de J_z. ¿Cuáles son los eigenvaores de J_x?
(Recuerda que puedes auxiliarte de una computadora para diagonalizar)

Ejercicio 3: Estado de un espín **2 pts**

En clase hablamos acerca del operador asociado al observable de espín $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde, en la base de eigenvectores de S^2 y S_z denotados por

$$\{|s = 1/2, m_s = 1/2\rangle = |+\rangle\,, |s = 1/2, m_s = -1/2\rangle = |-\rangle\},$$

las representaciones matriciales de las componentes son

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos operadores podemos obtener el observable de espín en una dirección arbitraria $\vec{u}$ determinada por los ángulos θ y φ por medio de

$$\vec{S} \cdot \vec{u} = S_u = S_x \sin\theta\cos\varphi + S_y \sin\theta\sin\varphi + S_z\cos\theta$$

Muestra que

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\,|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\,|-\rangle$$
$$|-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\,|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\,|-\rangle$$

son los eigenvectores de S_u.

Ejercicio 4: Desviación RMS en momento angular **2 pts**

Considerando un eigenestado de momento angular arbitrario $|\ell, m\rangle$. Encuentra: $\langle L_x\rangle$, $\langle L_z\rangle$, $\langle L_x^2\rangle$, $\langle L_z^2\rangle$, ΔL_x, ΔL_z.

Observa la estructura de las ecuaciones antes de hacer cálculos innecesarios.

Ejercicio 5: Valores esperados para átomo hidrogenoide **2 pts**

Para un átomo hidrogenoide en el estado $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$ calcula:

a. El valor esperado $\langle r\rangle$.

b. El radio con máxima probabilidad de encontrar al electrón (Ojo: recuerda que las funciones de onda calculadas están en coordenadas esféricas ¿Cómo afecta esto a la probabilidad radial?)

Ejercicio 6: Operadores escalera de momento angular **2 pts**

En clase encontramos que los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ con $m = \ell$ tienen la forma

$$Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = N\sin^\ell\theta e^{i\ell\varphi},$$

donde N es una constante de normalización.

a. Calcula N para el caso $\ell = 1$.

b. Usa L_- para obtener $Y_1^0(\theta,\varphi)$ y $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$ a partir de $Y_1^1(\theta,\varphi)$.