Mecánica Cuántica

Semestre 2023-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 4
Entrega: 03/05/2023

Ejercicio 1: Estados de oscilador armónico

Considera un oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω. Su estado inicial normalizado es

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle ,$$

donde $|\varphi_n\rangle$ son los eigenvectores del Hamiltoniano con eiganvalor $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

a ¿Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}$ de que al medir la energía al tiempo $t > 0$ obtengamos un resultado mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $\mathcal{P} = 0$ ¿Qué coeficientes c_n son distintos de cero?

b De ahora en adelante, supongamos que sólo c_0 y c_1 son distintos de cero. Escribe la condición de normalización para $|\psi(0)\rangle$ y el valor esperado $\langle H\rangle$ en términos de c_0 y c_1. Agregando el requisido de que $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcula $|c_0|^2$ y $|c_1|^2$.

Ejercicio 2: Estados estacionarios del oscilador armónico

Considera un oscilador armónico cuántico con frecuencia ω y masa m.

a Si el sistema se encuentra en el estado base $|\varphi_0\rangle$ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula afuera de la región permitida clásicamente?
Llegarás a una integral que no se puede resolver analíticamente usa el recurso que prefieras (web/programa/tabla) para calcularla.

b Usa el operador de ascenso $a^\dagger$ para encontrar una expresión para $\varphi_1(x) = \langle x|\varphi_1\rangle$ a partir de $\varphi_0(x)$.

c Usa el operador de ascenso $a^\dagger$ para encontrar una expresión para $\varphi_2(x) = \langle x|\varphi_2\rangle$ a partir de $\varphi_1(x)$.

Ejercicio 3: Estados coherentes

Usando la notación usual de oscilador armónico:

a Muestra directamente que un estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle \,,$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ es un egienvector del operador de descenso a.

b Calcula el valor esperado de X y P si el sistema de encuentra en el estado coherente $|\alpha\rangle$.

c Calcula el valor esperado de X^2 y P^2 si el sistema de encuentra en el estado coherente $|\alpha\rangle$ y calcula $\Delta X \Delta P$.

d Muestra que si un oscilador armónico inicia en un estado coherente $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, después de un tiempo $t > 0$ el estado $|\psi(t)\rangle$ seguirá siendo un estado coherente. Es decir. seguirá siendo un eigenvector de a pero con distinto eigenvalor. ¿Cuál es este nuevo eigenvalor?

e Usa los resultados anteriores para obtener $\langle X\rangle(t)$ y $\langle P\rangle(t)$ para un oscilador armónico cuya condición inicial es un estado coherente.

f Calcula el producto escalar $\langle\alpha|\alpha'\rangle$ entre dos estados coherentes. ¿Forman los estados coherentes una base ortonormal?

Ejercicio Extra 1 : Representación de momento **+1**

Considera un oscilador armónico cuántico con frecuencia ω y masa m.

a Encuentra la función de onda en la representación de momento del estado base del oscilador armónico $\varphi_0(p)$ usando $a|\varphi_0\rangle = 0$. Presenta tu respuesta de forma normalizada.

b Usa el operador de ascenso $a^\dagger$ para encontrar una expresión para $\varphi_1(p) = \langle p|\varphi_1\rangle$ a partir de $\varphi_0(p)$.

c ¿Cómo se comparan $|\varphi_0\rangle$ y $|\varphi_1\rangle$ en la representaciones x y p?