Mecánica Cuántica

Semestre 2022-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 1
Entrega: 15/02/2023

Ejercicio 1: Notación de Dirac

Considera un espacio cuya base ortonormal está dada por los kets $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Manteniendo este orden para la base, contesta los siguientes incisos:

a. Escribe la representación en componentes de $|2\rangle$.

b. Escribe la representación en componentes de $\frac{|2\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}$.

c. Escribe la representación en componentes de los operadores $|3\rangle\langle 2|$ y de $|2\rangle\langle 3|$.

d. Escribe la representación en componentes de $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|$.

Ejercicio 2: Operadores y conmutadores

Sean A y B operadores. Muestra que:

a. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

b. $[A, B] = -[B, A]$.

c. $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

d. $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

Ejercicio 3: Valores y vectores propios

Considera el operador cuya matriz, escrita en la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, se escribe como

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a. Escribe σ_y usando notiación de Dirac en términos de los vectores de la base.

b. ¿Es σ_y Hermitiano? Muéstralo.

c. Encuentra los valores y vectores propios de σ_y (escribiendo su expansión en términos de la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$).

d. Encuentra las matrices que representan a los proyectores a estos eigenvectores.

e. Verifica que los eigenvectores encontrados satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completud.

Ejercicio 4: Eigenespacios

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Describe el espacio vectorial de eigenvectores (eigenespacio) correspondiente a cada uno de sus eigenvalores.

Ejercicio 5: Base de eigenvectores

Considera un observable H y una base de sus eigevectores $|\phi_n\rangle$. Dando por hecho que los $|\phi_n\rangle$ forman una base discreta ortonormal considera el operador $U(m,n)$ definido como

$$U(m,n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$$

a. Calcula el adjunto $U^\dagger(m,n)$ de $U(m,n)$.

b. Calcula el conmutador $[H, U(m,n)]$.

c. Muestra que $U(m,n)U^\dagger(p,q) = \delta_{nq}U(m,p)$.

d. Si A es un operador cuyos elementos de matriz son $A_{mn} = \langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$ muestra que

$$A = \sum_{m,n} A_{mn} U(m,n).$$

Ejercicio 6: Conjunto completo de observables que conmutan

Considera un sistema físico cuyo espacio de estados es generado por los vectores base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Tomando la base en este orden, definimos dos operadores por su representación matricial (en componentes) como

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ω_0 y b son constantes.

a. ¿Son H y B Hermitianos? Muéstralo.

b. Muestra que H y B conmutan. Encuentra una base de eigenvectores comunes a H y B.

c. De los conjuntos de operadores $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H,B\}$, $\{H^2, B\}$, ¿cuáles forman un conjunto completo de observables que conmutan?

Ejercicio 7: Postulados de la Mecánica Cuántica

Tomando en cuenta el cuarto postulado para el caso de un espectro discreto no degenerado, muestra que la suma de las probabilidades de obtener todos los resultados es 1. ¿Qué significa este resultado?