Mecánica Cuántica

Semestre 2022-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Ayud: Alondra Jazmín Tapia de la Rosa

Tarea 4
Entrega: 08/05/2022

Ejercicio 1: Operadores para $j = 1/2$

Encuentra la representación matricial de los operadores J_x, J_y, J_z, J^2, J_+ y J_- en la base $\{|j = 1/2, m = +1/2\rangle, |j = 1/2, m = -1/2\rangle\}$.

Ejercicio 2: Valores esperados de para $j = 1$

Considera un sistema de momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está generado por la base $\{|1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de eigenvectores comunes a J^2 y J_z de la forma $|j, m\rangle$. Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1, 1\rangle + \beta\,|1, 0\rangle + \gamma\,|1, -1\rangle\,,$$

con α, β y γ números complejos:

a Calcula el valor esperado $\left\langle \vec{J} \right\rangle$ en términos de α, β y γ.

b Encuentra una expresión para los valores esperados $\langle J_x^2\rangle$, $\langle J_y^2\rangle$ y $\langle J_z^2\rangle$ en términos de α, β y γ.

Ejercicio 3: Relaciones de conmutación

Siguiendo la notación de suma de Einstein donde se suma sobre los índices repetidos podemos escribir las componentes cartesianas de $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ como $L_k = \varepsilon_{ijk} R_i P_j$ con ε_{ijk} el símbolo de Levi-Civita. Muestra las siguientes relaciones de conmutación:

a $[L_i, R_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} R_k$

b $[L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} P_k$

c $\left[L_i, P^2\right] = \left[L_i, R^2\right] = \left[L_i, \vec{R} \cdot \vec{P}\right] = 0$

Ejercicio 4: Cambio de eje de cuantización

Considera un sistema físico arbitrario cuyo espacio de estados de 4 dimensiones se genera por los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z para $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$.

a Escribe los cuatro eigenvectores comunes de J^2 y J_z, $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$

b Escribe los eigenvectores comunes a J^2 y J_x denotados por $|j, m_x\rangle$ en términos de los $|j, m_z\rangle$.

c Para el estado

$$|\psi\rangle = \alpha\,|j=1, m_z=1\rangle + \beta\,|j=1, m_z=0\rangle + \gamma\,|j=1, m_z=-1\rangle + \delta\,|j=0, m_z=0\rangle$$

- I ¿Cuál es la probabilidad de obtener los resultados $2\hbar^2$ y $\hbar$ respectivamente al medir J^2 y J_x simultáneamente?
- II Calcula el valor promedio de J_z cuando el sistema está en el estado $|\psi\rangle$.
- III ¿Cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener al medir J_z si el sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$?
- IV Repite los incisos cII y cIII, pero ahora para J_x.
- V Repite los incisos cII y cIII, pero ahora para J_z^2.

Ejercicio 5: Teorema Hellman-Feynman y observables de H

El Teorema de Hellman-Feynan es útil para calcular observables para el átomo de hidrógeno. Éste teorema dice que si tenemos un Hamiltoniano $H(\lambda)$ que depende de un parámetro real λ y un eigenvector normalizado $|\psi(\lambda)\rangle$ de $H(\lambda)$ con eigenvalor $E(\lambda)$ entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}E(\lambda) = \langle\psi(\lambda)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}H(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle\,.$$

a Demuestra este teorema. (Hint: calcula la derivada de $H(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle$ respecto a λ y multiplica por $\langle\psi(\lambda)|$.)

Una manera de calcular valores esperado como $\langle 1/r\rangle$ y $\left\langle 1/r^2\right\rangle$ para el átomo de hidrógeno es calcular las integrales $\int R_{nl}(r)\frac{1}{r}R_{nl}(r)r^2\,\mathrm{d}r$ y $\int R_{nl}(r)\frac{1}{r^2}R_{nl}(r)r^2\,\mathrm{d}r$ respectivamente. El Teorema de Hellman-Feynman nos ofrece una alternativa ingeniosa a este cálculo. Considerando la ecuación radial para las funciones de onda, ésta tiene un Hamiltoniano de la forma

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}r + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

donde notamos que tenemos un término proporcional a $1/r$ y otro a $1/r^2$.

b Derivando H_r respecto a e vemos que podemos aislar el término $1/r$. Usa esto, el teorema de Hellman-Feynman y los eigenvalores conocidos de hidrógeno para obtener una expresión para $\langle 1/r\rangle$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano.

c Calcula $\left\langle \frac{1}{r^2}\right\rangle$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano usando el mismo método. En este caso es necesario derivar respecto a ℓ y recordar que $n = \ell + k$, donde k era una constante por lo que $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\ell} = 1$.

Nota: en el planteamiento original de la ecuación e y ℓ eran parámetros fijos. Este método se aprovecha de considerarlos como variables.

Ejercicio 6: Desviación RMS en momento angular

Considerando un eigenestado de momento angular arbitrario $|\ell, m\rangle$. Encuentra: $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, ΔL_x, ΔL_x, ΔL_x.