Mecánica Cuántica

Semestre 2022-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Ayud: Alondra Jazmín Tapia de la Rosa

Tarea 2
Entrega: 20 marzo 2022

Ejercicio 1: Pozo infinito

El objetivo de este ejercicio es repasar las soluciones y argumentos asociados al problema del pozo cuadrado infinito. Considera una partícula en una dimensión cuyo Hamiltoniano es $H = \frac{P_x^2}{2m} + V(X)$ con

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{de otro modo} \end{cases}$$

a. Escribe la ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniando, $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, en términos de la función de onda en la base de posición $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ (es decir escribe la "ecuación de Schrödinger independiente del tiempo").

b. Muestra que E debe cumplir $E > 0$ para que la solución obtenida sea normalizable.

c. Fuera del pozo se debe cumplir que $\psi(x) = 0$. Encuentra las eigenfunciones y eigenvalores que son solución de ecuación del inciso a. Escribe tu solución de forma normalizada. (*Nota:* tu solución debe satisfacer las condiciones de frontera).

d. Haz un dibujo de algunas de las soluciones obtenidas.

e. Muestra que las soluciones obtenidas son ortonormales calculando el producto interno.

f. Calcula la desviación RMS de la posición ΔX cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano. ¿Qué te dice el resultado obtenido?

Ejercicio 2: Densidad de corriente de probabilidad

Definiendo $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}$, con S y ρ funciones reales.

a. Muestra que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho\frac{\boldsymbol{\nabla} S}{m}$ usando la definición de densidad de corriente de probabilidad vista en clase.

b. Muestra que si de dos funciones $\psi(\mathbf{r})$ y $\psi'(\mathbf{r})$ obtenemos las mismas $\rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ entonces $\psi(\mathbf{r})$ y $\psi'(\mathbf{r})$ difieren sólo por una fase global.

c. Dadas $\rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ funciones arbitrarias muestra que se les puede asociar un estado cuántico $\psi(\mathbf{r})$ sólo si $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, donde $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})/\rho(\mathbf{r})$ es la velocidad asociada con el flujo de probabilidad.

Ejercicio 3: El conmutador de $[P, V(X)]$

En este ejercicio mostrarás que $[P, V(X)] = -i\hbar V'(X)$.

a. Usando que $[X, P] = i\hbar$ muestra que $[P, X^n] = -i\hbar n X^{n-1}$. (*Sugerencia:* Usa inducción matemática.)

b. Usa el inciso anterior para mostrar que $[P, V(X)] = -i\hbar V'(X)$ (*Sugerencia:* Escribe $V(x)$ usando su expansión en serie.)

Ejercicio 4: Exponencial de un operador

Con A un operador Hermitiano y su ecuación de eigenvalores de la forma

$$A \left| u_n \right\rangle = a_n \left| u_n \right\rangle ,$$

considera un vector arbitrario $\left| \psi \right\rangle$.

a. Escribe a $\left| \psi \right\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores de A.

b. Expresa $e^A \left| \psi \right\rangle$ como combinación lineal de eigenvecotes de A. (*Sugerencia:* escribe e^A como serie de Taylor).

Ejercicio 5: Relación de incertidumbre generalizada

En este ejercicio demostrarás la relación de incertidumbre generalizada para dos operadores hermitianos A y B,

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \left\langle [A, B] \right\rangle \right)^2 ,$$

donde $\Delta A^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle$ y $\Delta B^2 = \left\langle (B - \langle B \rangle)^2 \right\rangle$.

a. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz $\left| \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \right|^2 \leq \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle$
   1. Definiendo $\left| \psi \right\rangle = \left| \phi_1 \right\rangle + \lambda \left| \phi_2 \right\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, encuentra la desigualdad resultante de $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$.
   2. La desigualdad obtenida es válida para toda λ. En particular para $\lambda = - \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle / \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle$. Usa esto para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

b. Usando esta desigualdad para $\left| f \right\rangle = (A - \langle A \rangle) \left| \psi \right\rangle$ y $\left| g \right\rangle = (B - \langle B \rangle) \left| \psi \right\rangle$ obtén que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left| \langle f | g \rangle \right|^2 .$$

c. Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$.

d. Muestra que $\langle f | g \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ y $\langle g | f \rangle = \langle BA \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle$.

e. Concluye que
$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [A,B]\rangle\right)^2.$$

f. ¿Qué forma toma la relación de incertidumbre para $A = X$ y $B = P$?

Nota: el conmutador de dos operadores Hermitianos tiene un factor de i por lo que la cantidad dentro de el paréntesis es real y por tanto su cuadrado es positivo.

Ejercicio 6: Fases globales y fases relativas

El objetivo de este ejercicio es resaltar que una fase global de un estado no tiene significado físico mientras que una fase relativa dentro de una superposición sí lo tiene.

a. Muestra que para un observable arbitrario A, su valor esperado $\langle A\rangle$ es el mismo para los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$ con φ un número real.

b. Considerando una base ortonormal $\{|\phi_n\rangle\}$ de eigenvectores de A con eigenvalores $\{a_n\}$, muestra que para un estado $|\psi\rangle = \sum_n e^{i\varphi} c_n |\phi_n\rangle$ la probabilidad de obtener el resultado a_n al hacer una medición no depende de φ.

c. Considera la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, el estado $|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y los operadores $B = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ y $C = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ y contesta las siguientes preguntas:

   I Calcula $\langle\psi|B|\psi\rangle$ y $\langle\psi|C|\psi\rangle$.

   II Obtén los eigenvalores y eigenvectores de C y B y usa esto para argumentar por qué $\langle\psi|B|\psi\rangle$ depende de θ mientras que $\langle\psi|C|\psi\rangle$ no.

Ejercicio 7: Operadores de posición y momento

a. Calcula el conmutador $\left[X^2, P^2\right]$ en términos de X y P.

b. En clase mostramos que $\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. En este inciso mostrarás una relación análoga para la representación $\{|p\rangle\}$. Muestra que

   I Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ la función de onda en el espacio de momento, el efecto de aplicar el operador X es:
$$\langle p|X|\psi\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p)$$

   II Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ y $\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$ funciones de onda en el espacio de momento, los elementos de matriz del operador X están dados por:
$$\langle\varphi|X|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p\, \varphi^*(p) i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p),$$

Ejercicio Extra 1 : Evolución temporal **+1**

Considera un sistema de cuatro estados que describimos en la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. En esta base, podemos escribir al Hamiltoniano como

$$H = \hbar\Delta_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\Delta_2 |2\rangle\langle 2| + \frac{\hbar\Omega}{2}(|3\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 3|),$$

con Δ_1, Δ_2 y Ω reales y distintos entre sí.

a. Encuentra los egienvalores y eigenvecotres de H.

b. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|\psi(0)\rangle = |4\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|4\rangle$ al tiempo t? (*Hint: escribe $|\psi(0)\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores del Hamiltoniano.*)

c. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|1\rangle$ al tiempo t?