Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo

$$H_0|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \qquad H(t) = H_0 + W(t) = H_0 + \lambda\hat{W}(t)$$

$$\hat{W}_{nk} = \langle\varphi_n|\hat{W}|\varphi_k\rangle \qquad \omega_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}$$

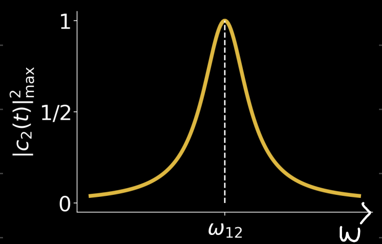
$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} W_{fi}(t')\,dt'\right|^2$$

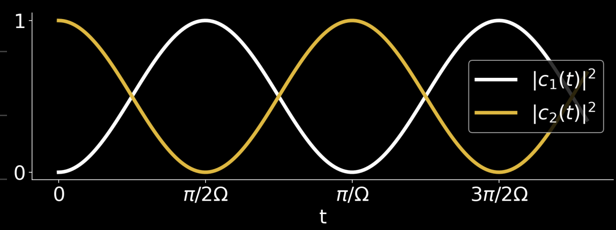
Ejemplo de evolución exacta

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \hbar\Omega\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega\left(e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| + e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1|\right)$$

$$\mathcal{P}_{12}(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + (\omega-\omega_{12})^2/4}\,\mathrm{sen}^2\left\{\left[\Omega^2 + \frac{(\omega-\omega_{12})^2}{4}\right]^{1/2} t\right\} \quad \text{con} \quad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$





Caso de una perturbación senoidal o constante:

Supongamos

$$\hat{W}(t) = \hat{W}\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \text{o} \qquad \hat{W}(t) = \underset{\text{matriz constante}}{\hat{W}}\cos\omega t$$

$$\hat{W}_{fi}(t) = \hat{W}_{fi}\,\mathrm{sen}\,\omega t = \frac{\hat{W}_{fi}}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} W_{fi}(t')\,dt'\right|^2$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} \frac{W_{fi}}{2i}\left(e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}\right) dt'\right|^2$$

$$= \frac{1}{4\hbar^2}|W_{fi}|^2 \left|\int_0^t e^{i(\omega_{fi}+\omega)t} - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'} dt'\right|$$

$$= \frac{|W_{fi}|^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi}+\omega} - \frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega}\right|^2$$

Para el aso $W(t) = W_{fi}\cos\omega t$ es análogo

$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{|W_{fi}|^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi}+\omega} + \frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega}\right|^2$$

Para perturbación constante $\omega = 0$

$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{|W_{fi}|^2}{\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i\omega_{fi}t}}{\omega_{fi}}\right|^2 = \frac{|W_{fi}|^2}{\hbar^2} F(t, \omega_{fi})$$

con $F(t,\omega) = \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega t/2)}{\omega/2}\right]^2$

Discusión

- Resonancias (Para $W \sim \cos\omega t$)

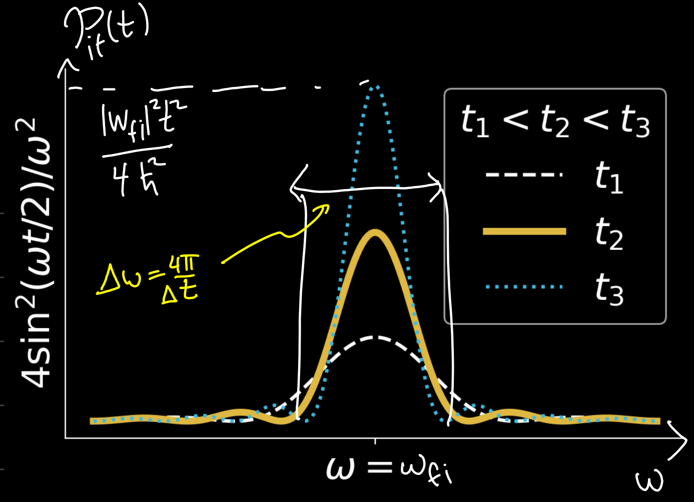
$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{|W_{fi}|^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi}+\omega} + \frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega}\right|^2$$

Si $\omega > 0$

esto puede valer cero cuando $\omega_{fi} \simeq \omega$

Considerando el caso $|\omega - \omega_{fi}| \ll |\omega_{fi}|$ podemos despreciar el término con $\omega_{fi} + \omega$

$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{|W_{fi}|^2}{4\hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi})$$



$$F(t,\omega) = \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega t/2)}{\omega/2}\right]^2$$

$$\approx \left[\frac{\omega t/2}{\omega/2}\right]^2 = t^2$$

$$\underbrace{\hbar\Delta\omega}_{\Delta E} \propto \frac{\hbar\, 4\pi}{\Delta E} \rightarrow \Delta t\, \Delta E \approx \hbar$$

Limitaciones de aproximación de 1er orden

$$\mathcal{P}_{if}(t, \omega = \omega_{fi}) = \frac{|W_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2 \xrightarrow[\text{grande}]{\text{Para } t} \infty$$

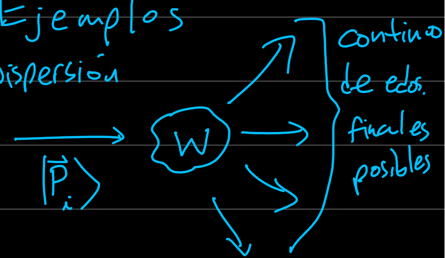
Para ser válido $\quad t \ll \frac{\hbar}{|W_{fi}|}$

Para mostrar esto formalmente habría que calcular los términos de perturbaciones de orden superior y ver cuándo son relevantes.

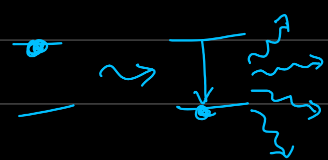
Acoplamiento de un estado discreto y uno continuo.

Ejemplos

Dispersión



Decaimiento



$|e, 0\rangle \rightsquigarrow |b, \hbar\vec{k}\rangle$

Nos interesa

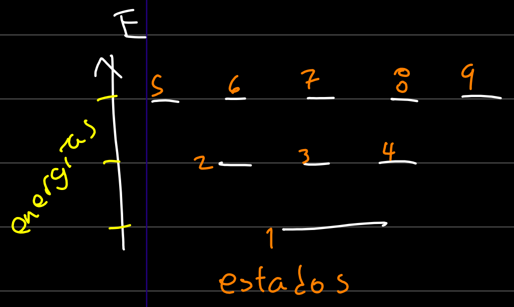
prob de encontrar al sistema en un edo. $\alpha \in D_f$

$$\delta P(\alpha_f, t) = \int_{\alpha \in D_f} d\alpha \, |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2$$

Podemos escribir esta integral sobre estados como una integral sobre energías usando

densidad de estados.

$$d\alpha \rightarrow \rho(E)\,dE$$



E total

Suma sobre estados

$$\sum_{n=1}^{9} E_n$$

índice de estado

\# de degeneración juega papel de $\rho(E)$

Suma sobre energías

$$\sum_{E=1}^{3} g_n = E_1 1 + E_2 3 + E_3 5$$

nivel de energía

$$\delta P(\alpha_f, t) = \int_{E\in\delta E_f} dE\, \rho(E)\, |\langle E|\psi(t)\rangle|^2$$

energías de estados finales

Considerando un estado inicial $|\varphi_i\rangle$ y perturbación constante

$$|\langle E|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{|\langle E|W|\varphi_i\rangle|^2}{\hbar^2} F\left(t, \frac{E-E_i}{\hbar}\right)$$

$$\delta P(\varphi_i, \alpha_f, t) = \int_{E\in\delta E_f} dE\, \rho(E)\, \frac{|\langle E|W|\varphi_i\rangle|^2}{\hbar^2} F\left(t, \frac{E-E_i}{\hbar}\right)$$

Para $t \gg \frac{\hbar}{E-E_i}$; $F \xrightarrow[\text{o bien } E\simeq E_i]{t\ \text{grande}} \delta\left(\frac{E-E_i}{2\hbar}\right)\pi t = 2\pi\hbar t\,\delta(E-E_i)$

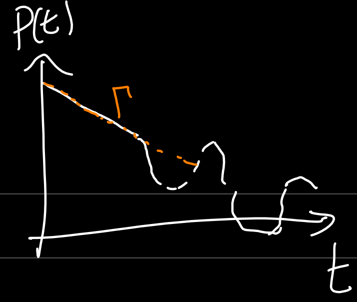
$$\delta P(\varphi_i, \alpha_f, t) = \frac{2\pi}{\hbar}\rho(E_f=E_i)\,|\langle E_f=E_i|W|\varphi_i\rangle|^2\, t$$

Probabilidad de encontrar al sistema en el estado final al partir de un estado inicial $|\varphi_i\rangle$, proporcional a t.

¿Cuál es la tasa de transición de $|\varphi_i\rangle \rightarrow |\alpha_f\rangle$?

tasa de transición $\Gamma = \frac{d}{dt}\delta P$

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_f = E_i) \left| \langle E_f = E_i | W | \varphi_i \rangle \right|^2}$$



Regla de oro de Fermi

Pueden calcular tasas de decaimiento u otro tipo de transición.