Partículas indistinguibles

Considerando dos partículas idénticas
- Con todos los kets de la forma

$$\rightarrow c_1|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 + c_2|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2$$

se obtienen los mismos resultados
- Degeneración de intercambio

- Operador de intercambio P_{12}

  - $[H, P_{12}] = 0 \Rightarrow P_{12}$ es constante de mov.
  - Los e-valores de P_{12} son $+1$ (simétrico), -1 (antisimétrico)

Postulado de simetrización.
- Los sistemas conformados por N partículas idénticas ocupan estados que son totalmente simétricos o anti-sim.

simetría		estadística		momento angular
- Simétricos	$\leftrightarrow$	Bose-Einstein	$\leftrightarrow$	entero
- Antisimétricos	$\leftrightarrow$	Fermi-Dirac	$\leftrightarrow$	semi entero

Principio de Exclusión de Pauli: dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado.
- Como son fermiones, el estado es antisimétrico respecto al intercambio
-
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 - |\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$$

Si $\alpha = \beta$ entonces $|\psi\rangle = 0$.

Principio de Exclusión de Pauli $\Rightarrow$ Tabla periódica

- Para entender mejor la diferencia entres bosones y fermiones pensemos que cada partícula sólo tiene 2 estados posibles $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$

- Para 2 partículas distinguibles los estados posibles son: (4)

$$\underbrace{|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2}_{1/4} \; ; \; \underbrace{|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2}_{1/4} \; ; \; \underbrace{|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2}_{1/4} \; ; \; \underbrace{|\beta\rangle_1|\beta\rangle_2}_{1/4}$$

y combinaciones lineales de estos.

- Para 2 fermiones los estados posibles son: (1)

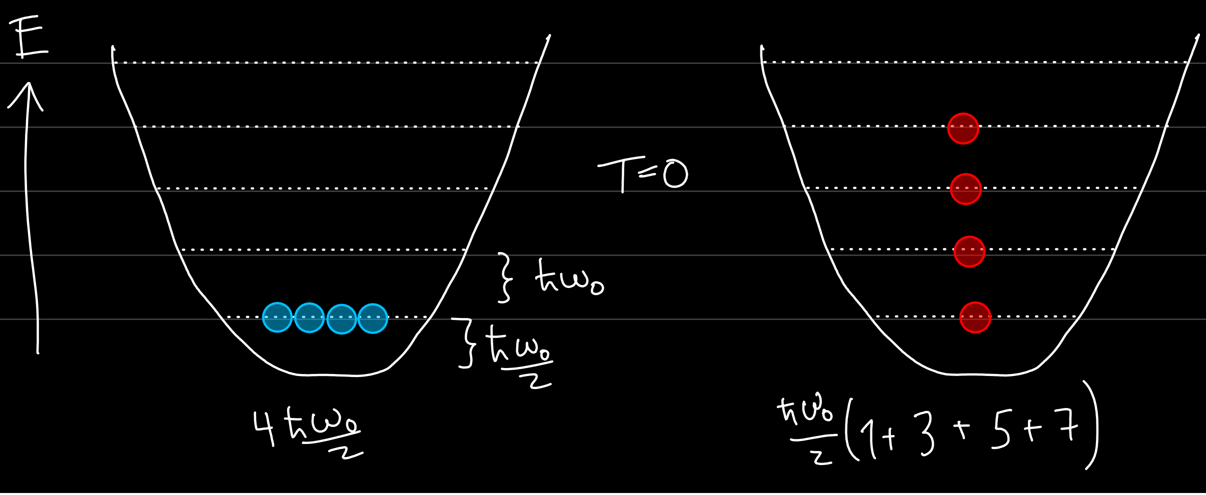
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 - |\beta\rangle_1|\alpha\rangle\right)$$

- Para 2 bosones los estados posibles son. (3)

$$\underbrace{|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2}_{1/3} \; ; \; \underbrace{|\beta\rangle_1|\beta\rangle_2}_{1/3} \; ; \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 + |\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)}_{1/3}$$

Para bosones hay mayor peso estadístico que si fueran distinguibles. para que ambas partículas estén en el mismo estado.

Bosones: "sociables" Fermiones: "anti-sociales".



Métodos aproximados en M.C.

- Hidrógeno y oscilador armónico tienen solución analítica.
- Esto ocurre para muy pocos sistemas.

→ Para He no hay solución analítica

→ Para H con correcciones relativistas tampoco.

Veremos
- Teoría de perturbaciones (hoy)
- Método variacional
- Método WKB o semi-clásico

Teoría de perturbaciones

- Se aplica cuando

conocemos sus e-valores y e-vectores

$$H = H_0 + W$$

perturbación "pequeña"

- Burdo → Fino

Teoría de perturbaciones estacionaria

H_0, W no dependen de t.

Objetivo: Cómo afecta la presencia de W a los e-valores y e-vectores de H.

W es pequeño si sus elementos de matriz son más chicos que los de H. En realidad veremos que la condición importante es que los elementos de matriz de W sean más chicos que las diferencias entre los e-valores de H.

$(\hat{W} \sim H_0)$

$W = \lambda \hat{W}$ con λ un número adimensional $\lambda \ll 1$

Con λ controlamos el tamaño de la perturbación

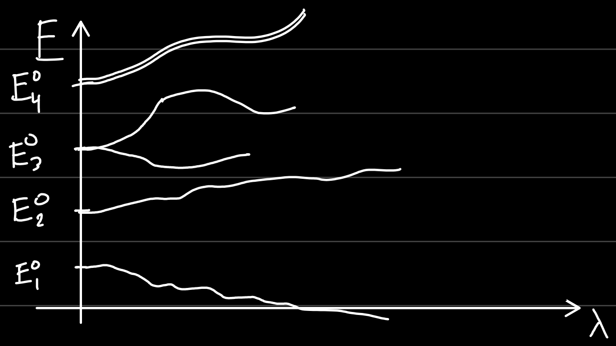
La teoría de perturbaciones estacionaria (TPE) consiste en escribir los e-valores y e-vectores de H como serie de potencias de λ y quedarnos con los términos de interés.

- e-valores de H_0 conocidos (discreto) E_p^0 son de H_0 índice entero
- e-vectores de H_0 conocidos $|\varphi_p^i\rangle$ por si hay degeneración

Los $|\varphi_p^i\rangle$ forman una base ortonormal

$$\langle \varphi_p^i | \varphi_{p'}^{i'} \rangle = \delta_{pp'} \delta_{ii'} \quad ; \quad \sum_p \sum_i |\varphi_p^i \rangle\langle \varphi_p^i| = \mathbb{1}$$

Consideramos $H(\lambda) = H_0 + \lambda \hat{W}$



a cada curva le corresponde al menos un e-vector.

Cuando $\lambda \to 0$, los e-valores de $H \to$ e-valores de H_0

Buscamos e-vectores $|\psi_p(\lambda)\rangle$ y e-valores $E_p(\lambda)$ para

$$H(\lambda)|\psi_p(\lambda)\rangle = E_p(\lambda)|\psi_p(\lambda)\rangle$$

Si escribimos

$$E(\lambda) = \underline{\varepsilon_0} + \lambda \underline{\varepsilon_1} + \lambda^2 \underline{\varepsilon_2} + \cdots = \sum_q \lambda^q \underline{\varepsilon_q}$$

$$|\psi(\lambda)\rangle = |\underline{\psi_0}\rangle + \lambda |\underline{\psi_1}\rangle + \lambda^2 |\underline{\psi_2}\rangle + \cdots = \sum_q \lambda^q |\underline{\psi_q}\rangle$$

Enchufando estas ecuaciones en $H(\lambda)|\psi_p(\lambda)\rangle = E_p(\lambda)|\psi_p(\lambda)\rangle$

$$(H_0 + \lambda \hat{W}) \left[\sum_q \lambda^q |\psi_q\rangle \right] = \left[\sum_q \lambda^q \varepsilon_q \right] \left[\sum_q \lambda^q |\psi_q\rangle \right]$$

$$(H_0 + \lambda \hat{W}) \left[|\psi_0\rangle + \lambda |\psi_1\rangle + \cdots \right] = (\varepsilon_0 + \lambda \varepsilon_1 + \cdots) \left[|\psi_0\rangle + \lambda |\psi_1\rangle + \cdots \right]$$

Agrupando los coeficientes de λ con la misma potencia

$\lambda^0 : \quad H_0 |\psi_0\rangle = \varepsilon_0 |\psi_0\rangle$ los términos de orden cero son los e-valores y e-vectores de H_0.

$\lambda^1 : \quad H_0 |\psi_1\rangle + \hat{W}|\psi_0\rangle = \varepsilon_0 |\psi_1\rangle + \varepsilon_1 |\psi_0\rangle$

$\lambda^2 : \quad H_0 |\psi_2\rangle + \hat{W}|\psi_1\rangle = \varepsilon_0 |\psi_2\rangle + \varepsilon_1 |\psi_1\rangle + \varepsilon_2 |\psi_0\rangle$

$\vdots$

Caso no degenerado

Consideremos un e-valor particular de H_0, E_n^0 con e-vector $|\varphi_n\rangle$

A primer orden

Queremos obtener

$$E(\lambda) = \underline{\varepsilon_0} + \lambda \underline{\varepsilon_1}$$
$$|\psi(\lambda)\rangle = |\underline{\psi_0}\rangle + \lambda |\underline{\psi_1}\rangle$$

$\varepsilon_0 = E_n^0 \quad ; \quad |\psi_0\rangle = |\varphi_n\rangle$

Usando : $(H_0 - \varepsilon_0)|\psi_1\rangle + (\hat{W} - \varepsilon_1)|\psi_0\rangle = 0$

Multiplicando por $\langle\psi_0|$

$$\cancel{\langle\psi_0| \underbrace{H_0}_{\varepsilon_0} - \varepsilon_0 |\psi_1\rangle}^{0} + \langle\psi_0| \hat{W} - \varepsilon_1 |\psi_0\rangle = 0$$

$$\varepsilon_1 = \langle \psi_0 | \hat{W} | \psi_0 \rangle$$

$$\underline{E_n(\lambda)} = \varepsilon_0 + \lambda \varepsilon_1 = E_n^0 + \lambda \langle \varphi_n | \hat{W} | \varphi_n \rangle$$
$$= \underline{E_n^0 + \langle \varphi_n | W | \varphi_n \rangle}$$

La corrección a orden 1 de la energía es el valor esperado de la perturbación.