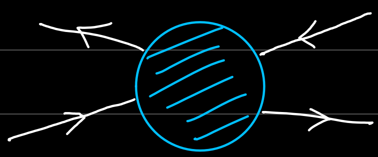
Partículas idénticas

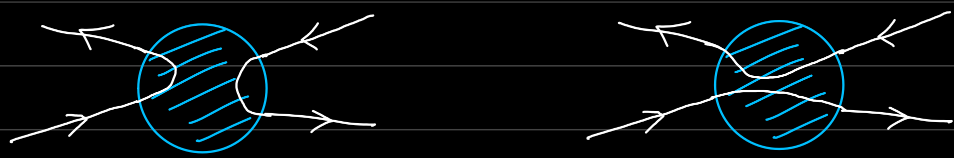
- En mecánica clásica siempre podemos distinguir partículas idénticas: segir trayectorias.

- En cuántica las partículas idénticas son indistinguibles.
    - El estado de una partícula está determinado por un C.C.O.C.
    - No se pueden seguir trayectorias

- En una colisión



- Clásicamente



- Cuánticamente no podemos distinguir entre estos casos.

- Consideremos dos partículas idénticas:
    - Partícula 1 descrita por $|\alpha\rangle_1$ con α conjunto de índices asosiados a un CCOC.
    - Partícula 2 con $|\beta\rangle_2$
    - El estado del sistema de 2 partículas es

$$|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2$$

podemos no escribir el 1 y 2 si nos ponemos de acuerdo en el orden de los kets.

- También podemos considerar el estado

$$|\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2$$

- Aunque las partícuals sean indistinguibles

$$|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 \neq |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 \quad (\text{si } \alpha \neq \beta)$$

(de hecho son ortogonales)

$${}_2\langle\beta|\,{}_1\langle\alpha|\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 = 0$$

- Si medimos el C.C.O.C. del sistema y obtenemos α y β como resultado no sabemos en cuál de estos estados se encuentra el sistema

$$|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 \quad \text{o} \quad |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2$$

(o incluso una combinación lineal de estos)

$\therefore$ Todos los kets de la forma

$$c_1 |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 + c_2 |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2$$

dan los mismos resultados al medir el CCOC.

A esto se le conoce como degeneración de intercambio.

¿El CCOC no determina al estado del sistema?

Para resolver esto estudiaremos la simetría de permutación.

Definición: Operador de permutación P_{12}

$$P_{12}|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 = |\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2$$

$$P_{12}|\alpha\rangle_1\otimes|\beta\rangle_2 = |\alpha\rangle_2\otimes|\beta\rangle_1 = |\beta\rangle_1\otimes|\alpha\rangle_2$$

Notamos que $P_{12}P_{12} = P_{12}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow P_{12} = P_{12}^{-1}$

- En la práctica es común encontrar observables con etiquetas de partículas.

$$\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

- Consideramos (por simplicidad) que el CCOC de cada partícula es un operador A

$$\left.\begin{aligned} A_1|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 &= \alpha|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 \\ A_2|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 &= \beta|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Aplicando P_{12} de ambos lados

$$P_{12}\underset{\mathbb{1}=P_{12}^{-1}P_{12}}{A_1}|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 = \alpha P_{12}|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2$$

$$P_{12}A_1P_{12}^{-1}P_{12}|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 = \alpha|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2$$

$$P_{12}A_1P_{12}^{-1}|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2 = \alpha|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2$$

Para ser consistentes con $(*)$ $P_{12}A_1P_{12}^{-1} = A_2$

$\therefore$ Hacer $P_{12}A_1P_{12}^{-1}$ cambia las etiquetas $1\rightarrow 2$ de los observables.

Nota: los observables de partículas idénticas deben aparecer de forma simétrica en H.

- Consideremos

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + V_{ext}(\vec{r}_1) + V_{ext}(\vec{r}_2)$$

$$P_{12} H P_{12}^{-1} = \frac{P_2^2}{2m} + \frac{P_1^2}{2m} + V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) + V_{ext}(\vec{r}_2) + V_{ext}(\vec{r}_1)$$

$$H|_{1\leftrightarrow 2} = H$$

$\therefore$ H es invariante ante el intercambio de índices.

$P_{12} H P_{12}^{-1} = H \Rightarrow P_{12} H = H P_{12} \Rightarrow [P_{12}, H] = 0$

$\therefore$ P_{12} es una constante de movimiento.

→ Podemos encontrar una base común de eigenvectores

→ $P_{12}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ los e-valores de P_{12} son +1 y -1.

→ A los e-vectores de P_{12} con e-valor 1 los llamamos simétricos.

→ A los e-vectores de P_{12} con e-valor -1 los llamamos anti-simétricos.

→ Como P_{12} en una cte. de mov si un sistema inicia en un estado simétrico (o antisimétrico) se mantendrá así.

Los e-vectores de P_{12} son de la forma

$$|\alpha\beta\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 + |\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$$

simétrico

$$P_{12}|\alpha\beta\rangle_+ = +1\,|\alpha\beta\rangle_+$$

$$|\alpha\beta\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 - |\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2\right)$$

antisimétrico

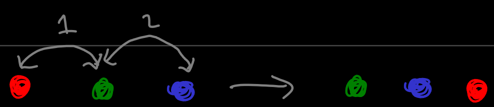
$$P_{12}|\alpha\beta\rangle_- = -1\,|\alpha\beta\rangle_-$$

Para considerar más partículas definimos el operador de permutación en general

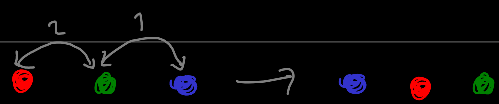
$$P_{ij}\,|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\cdots|\gamma\rangle_i\cdots|\delta\rangle_j\cdots|\epsilon\rangle_N =$$
$$|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\cdots|\gamma\rangle_j\cdots|\delta\rangle_i\cdots|\epsilon\rangle_N =$$
$$|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\cdots|\delta\rangle_i\cdots|\gamma\rangle_j\cdots|\epsilon\rangle_N$$

Con $P_{ij}^2 = \mathbb{1} \rightarrow$ e-valores ± 1

Ojo $[P_{ij}, P_{jk}] \neq 0$



$P_{23}P_{12}$



$P_{12}P_{23}$

Caso de 3 partículas

Hay $3! = 6$ permutaciones de estados de la forma.

$$|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\gamma\rangle_3$$
$$|\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\gamma\rangle_3$$
$$\vdots$$

con α, β, γ dististos. ¿Cuántas combinaciones lineales totalmente simétricas o anti simétricas hay? Sólo hay una simetrica y otra anti-simétrica.

$$|\alpha\beta\gamma\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\gamma\rangle_3 + |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\gamma\rangle_3 + |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + |\gamma\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + |\alpha\rangle_1 |\gamma\rangle_2 |\beta\rangle_3 + |\gamma\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\beta\rangle_3 \Big]$$

$$|\alpha\beta\gamma\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[+ |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\gamma\rangle_3 - |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\gamma\rangle_3 + |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2 |\alpha\rangle_3 - |\gamma\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\alpha\rangle_3 + |\gamma\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\beta\rangle_3 - |\alpha\rangle_1 |\gamma\rangle_2 |\beta\rangle_3 \Big]$$

6 estados independientes $\Rightarrow$ 4 que no tienen simetría, 1 simétrico y 1 anti simétrico

Nota: Si dos de los índices coinciden no se puede formar un estado totalmente anti simétrico.

$(\beta = \gamma)$

$$|\alpha\beta\beta\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\cancel{+ |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\beta\rangle_3} \cancel{- |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\beta\rangle_3} \cancel{+ |\beta\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\alpha\rangle_3} \cancel{- |\beta\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\alpha\rangle_3} \cancel{+ |\beta\rangle_1 |\alpha\rangle_2 |\beta\rangle_3} \cancel{- |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 |\beta\rangle_3} \Big] = 0$$

Postulado de simetrización

- Los sistemas conformados por N partículas idénticas ocupan estados totalmente simétricos o antisimétricos.

- Para estados simétricos se dice que las partículas satisfacen la estadística de Bose-Einstein. (Bosones)

- Para estados antisimétricos se dice que las partículas satisfacen la estadística de Fermi-Dirac (Fermiones)

- Hechos empíricos:
  - Las particulas con espín entero $\rightarrow$ Bosones
  - Las particulas con espín semi-entero $\rightarrow$ Fermiones

  - Pueden haber partículas compuestas

  - Fermiones: e^-, núcleo ^3He, ^6Li
  - Bosones: núcleo ^4He, ^{87}Rb, ^7Li

- Como con $|\alpha\beta\beta\rangle_- = 0$; dos fermiones no pueden estar en el mismo estado.
- Principio de exclusion de Pauli.