Suma de momentos angulares: conclusión

Para momentos angulares $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ y $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

$$\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\} \xleftrightarrow[\text{mismo \# de elementos.}]{\text{bases del mismo espacio}} \{|j_1 j_2 j\, m\rangle\}$$

$-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ $\qquad$ $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

$-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ $\qquad$ $m = m_1 + m_2$

Ojo: $j \neq j_1 + j_2$

Es fácil saber cuáles son los elementos en cada caso una ves que sabemos j_1 y j_2. La dificultad de sumar momentos angulares radica en encontrar cómo se relaciona una base con la otra

$$|j_1 j_2 j\, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1 j_2 j m\rangle$$

Para encontrar $C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} = \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

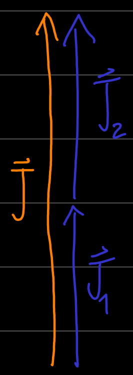
Usamos 2 métodos

1) Escribir J^2 y J_z en la base $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ y diagonalizarlos.

2) Encontrar $|j, m=j\rangle$ en términos de $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ y usar J_- para encontrar los demás.

Vamos a detallar cómo hacer 2 en general.

Primer nivel: $j = j_1 + j_2$



Como $m = m_1 + m_2$

$|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = |j_1, m_1 = j_1, j_2, m_2 = j_2\rangle$

Luego, usando $J_- = J_{1-} + J_{2-}$

podemos optener

$|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 1\rangle, |j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 2\rangle, \ldots$

Ejemplo $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = 1$

$(2j_1+1)(2j_2+2) = 6$ elementos

$\frac{1}{2} = |1 - \frac{1}{2}| \leq j \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

$\{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1\rangle,$
$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\rangle$
$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\rangle, \underline{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle}\}$

$|j\, m\rangle$

$\{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle,$
$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$
$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \underline{|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle}\}$

Siguiente nivel

$$|j = j_1 + j_2 - 1, m = j_1 + j_2 - 1\rangle = \alpha |j_1, m_1 = j_1 - 1, j_2, m_2 = j_2\rangle + \beta |j_1, m_1 = j_1, j_2, m_2 = j_2 - 1\rangle$$

Determinamos α y β con: i) normalización
ii) Ortogonalidad con $|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 1\rangle$

Usamos $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ para encontrar los demás con $j = j_1 + j_2 - 1$.

Siguiente nivel $j = j_1 + j_2 - 2$

$$|j = j_1 + j_2 - 2, m = j_1 + j_2 - 2\rangle = \alpha \left|\begin{matrix} j_1 & m_1 & j_2 & m_2 \\ & j_1 - 2 & & j_2 \end{matrix}\right\rangle + \beta |\; j_1 \quad j_2 - 2\rangle + \gamma |\; j_1 - 1 \quad j_2 - 1\rangle$$

Determinamos α y β con: i) normalización
ii) Ortogonalidad con
$|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-2\rangle$
$|j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-2\rangle$

Ya teniendo $|j=j_1+j_2-2, m=j_1+j_2-2\rangle$ usamos J_- para encontrar los demás con $j=j_1+j_2-2$.

$\vdots$ etc hasta que
$\vdots$ $j=|j_1-j_2|$

Ejemplo de aplicación de suma de momentos angulares.

Estructura fina en hidrógeno (término de acoplamiento espín – órbita).

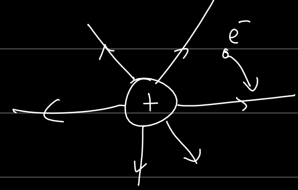
$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$H_0 = \sum_{n,l,m} E_n |nlm\rangle\langle nlm| \rightarrow H_0|nlm\rangle = E_n|nlm\rangle$$

Al tomar en cuenta el espín $|nlm\rangle \rightarrow |nlm_l\rangle \otimes |sm_s\rangle$

$$H_0|nlm_l sm_s\rangle = E_n|nlm_l sm_s\rangle$$ (degeneración en l, m_l, s, m_s)

Al incluir efectos relativistas



- En el M.R. del electron hay un campo magnético debido al núcleo proporcional a $\vec{L}$.
- Debido al espin, el electrón tiene un momento magnético.

$$H_{FS} = H_0 + A\vec{L}\cdot\vec{S}$$ constante.

Los e-vectores de H_0 son $|n\, l\, \overbrace{m_l\, s\, m_s}^{\text{degeneración}}\rangle$

H_0 es diagonal en la base $\{|n\, l\, m_l\, s\, m_s\rangle\}$

¿Es H_{FS} diagonal en la base $\{|n\, l\, m_l\, s\, m_s\rangle\}$?

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z = L_z S_z + \frac{1}{2}(L_+S_- + L_-S_+)$$

$$\langle n'\, l'\, m_l'\, s'\, m_s' |\, L_+ S_-\, | n\, l\, m_l\, s\, m_s\rangle$$

$$= [\text{constante}]\ \langle n'\, l'\, m_l'\, s'\, \underline{m_s'} | n\, l\, m_l{+}1\, s\, \underline{m_s-1}\rangle$$

$\therefore\ \vec{L}\cdot\vec{S}$ no es diagonal en esta base.

- Como es un sistema aislado, $\vec{J} = \vec{L}+\vec{S}$, J^2 es una constante de movimiento.
- Entonces $[H_{FS}, \vec{J}] = 0$; $[H_{FS}, J^2] = 0$
- Existe una base común de e-vectores de H_{FS}, J^2, J_z

$$J^2 = (\vec{L}+\vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S} \Rightarrow \vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

$$J^2 |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1)\, |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle$$
$$L^2 |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle = \hbar^2 l(l+1)\, |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle$$
$$S^2 |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle = \hbar^2 s(s+1)\, |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle$$

Usando la base $\{|n\, l\, s\, j\, m_j\rangle\}$ $\vec{L}\cdot\vec{S}$ es diagonal (i.e. los $|l\, s\, j\, m_j\rangle$ son e-vectores de $\vec{L}\cdot\vec{S}$).

Los e-vectores de $H_{FS} = H_0 + A\vec{L}\cdot\vec{S}$ son $|n\, l\, s\, j\, m_j\rangle$ con e-valor $E_n + \frac{A\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right]$

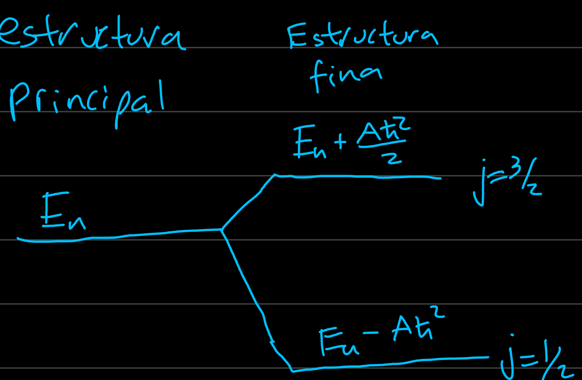
Para $l=1$ (para el e^- $s=\frac{1}{2}$)

Los valores que puede tomar j son $|l-s| \leq j \leq l+s$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2}$

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$E_n + \frac{A\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right] = \begin{cases} E_n + \frac{A\hbar^2}{2} & \text{si } j=3/2 \\ E_n - A\hbar^2 & \text{si } j=1/2 \end{cases}$$



Estructura hiperfina.

$$H_{HF} = H_{FS} + B\vec{I}\cdot\vec{J}$$

momento angular nuclear.

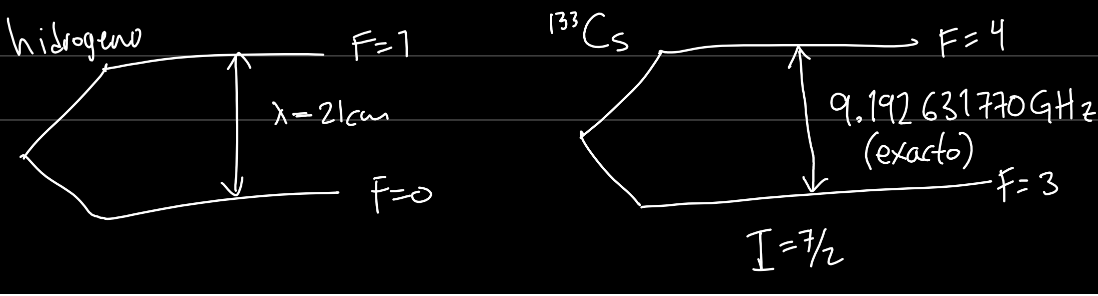
↓

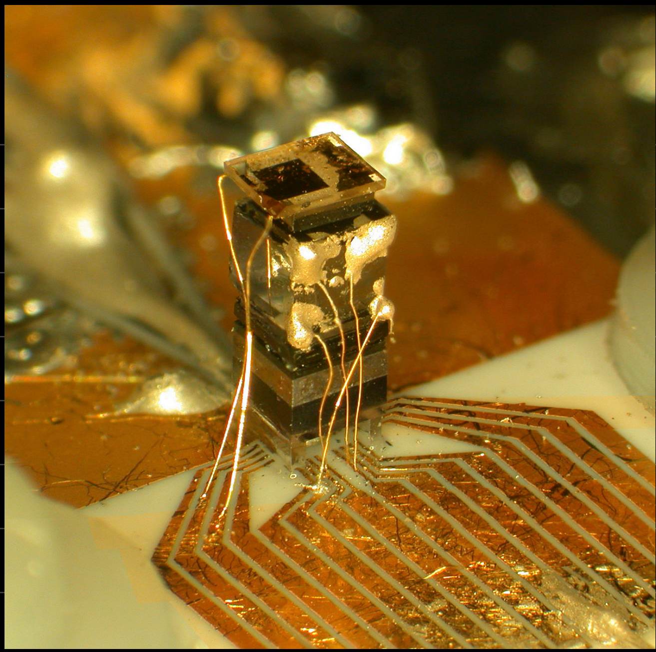
también tiene momento magnético.

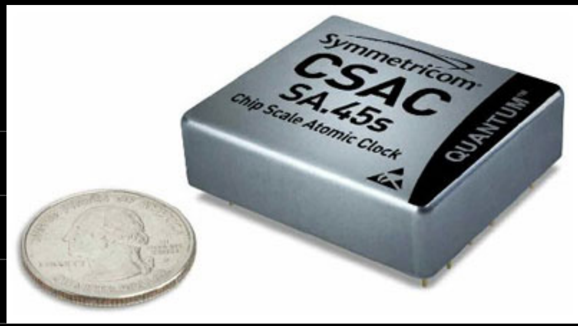
Momento angular total $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$

$\vec{I}\cdot\vec{J}$ no es diagonal en $|n\, l\, s\, j\, m_j\rangle \otimes |I\, m_I\rangle$
pero sí es diagonal en $|n\, l\, s\, j\, I\, F\, m_F\rangle$.

El estado base se divide en dos






Symmetricom
CSAC
SA.45s
Chip Scale Atomic Clock
QUANTUM