Suma de momentos angulares
Caso general

Partimos de $J_1^2, J_{1z} \rightarrow \{|j_1, m_1\rangle\}$

$J_2^2, J_{2z} \rightarrow \{|j_2, m_2\rangle\}$

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ¿Cómo describir el momento angular total?

En el capítulo anterior... $j_1 = s_1 = \frac{1}{2}$; $j_2 = s_2 = \frac{1}{2}$

Hay dos bases distintas:

$|s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle = |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle \overset{\text{abreviación}}{=} |m_1 m_2\rangle \quad \{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\}$

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \quad |s_1 s_2 S m_S\rangle = |S m_S\rangle \quad \{|00\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$

e-vectores de J^2, J_z, J_1^2, J_2^2 → $|S\ m_S\rangle$ | $|m_1\ m_2\rangle$ ← e-vectores de $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$|1\,-1\rangle = |-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$|1\,1\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

Caso general

$|j_1 m_1\ j_2 m_2\rangle$ $\qquad$ $|j_1 j_2\ j\ m\rangle$

$-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ $\qquad$ $-j \leq m \leq j$

$-j_2 \leq m_2 \leq j_2$

¿Cómo escribir $|j_1 j_2 j m\rangle \overset{\text{notación}}{=} |j m\rangle$ en términos de $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$?

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{j_1' m_1' j_2' m_2'} C_{j_1' m_1' j_2' m_2'} |j_1' m_1' j_2' m_2'\rangle$$

¿Cómo obtenemos $C_{j_1' m_1' j_2' m_2'}$?

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \qquad \mathbb{1}$$

Usando

$$\mathbb{1} = \sum_{j_1' j_2'} \sum_{m_1=-j_1'}^{j_1'} \sum_{m_2=-j_2'}^{j_2'} |j_1' m_1 j_2' m_2\rangle\langle j_1' m_1 j_2' m_2|$$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{\substack{j_1' j_2' \\ m_1 m_2}} \overbrace{|j_1' m_1 j_2' m_2\rangle}^{\text{ket}} \underbrace{\overbrace{\langle j_1' m_1 j_2' m_2 | j_1 j_2 j m\rangle}^{\text{escalar complejo}}}_{\text{Coeficiente de Clebsch-Gordan}}$$

Conversamente, usando

$$\mathbb{1} = \sum_{\substack{j_1' j_2' \\ j' m'}} |j_1' j_2' j m\rangle\langle j_1' j_2' j m|$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{\substack{j_1' j' \\ j m}} |j_1' j_2' j m\rangle \overbrace{\langle j_1' j_2' j m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle}$$

Veamos que los coeficientes de Clebsch-Gordan son cero a menos que

$$j_1' = j_1 \ , \quad j_2' = j_2 \quad y \quad m = m_1 + m_2$$

Demostración

$$\langle j_1 j_2 j m | J_1^2 | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle = \hbar^2 j_1'(j_1'+1) \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle$$
$$= \hbar^2 j_1 (j_1 + 1) \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle$$

$$\therefore \ j_1 = j_1' \quad o \quad \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle = 0$$

Análogamente $\quad j_2 = j_2' \quad o \quad \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle = 0$

$$\langle j_1 j_2 j m | J_z | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle = \hbar (m_1 + m_2) \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle$$

$J_z \qquad J_{1z} + J_{2z}$

$$= \hbar m \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle$$

$$\therefore \ m_1 + m_2 = m \quad o \quad \langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle = 0$$

Como $j_1' = j_1$ y $j_2' = j_2$ escribimos

$$\langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2 \rangle = \langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2}$$

Como $\vec{J}$ es un momento angular

$$-j \leq m \leq j$$

pero ¿Que valores puede tomar j dado j_1 y j_2?

1) Sabemos que $m_1 + m_2 = m \Rightarrow \underset{j_1}{m_{1max}} + \underset{j_2}{m_{2max}} = m_{max} = j_{max}$

$$\Rightarrow j_{max} = j_1 + j_2$$

$$? \le j \le j_1 + j_2$$

2) Para encontrar la cota inferior para j debemos preguntarnos ¿Cuál debe ser j_{min} para que las bases $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ y $\{|j_1 j_2 j m\rangle\}$ tengan el mismo # de elementos?

Para j_1 y j_2 fijos. ¿Cuántos elementos hay en $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$?

$$(2j_1+1)(2j_2+1)$$

$$m_1 = \underbrace{-j_1, -j_1+1, \ldots, j_1-1, j_1,}_{2j_1+1} \qquad m_2 = \underbrace{-j_2, -j_2+1, \ldots, j_2-1, j_2}_{2j_2+1}$$

¿Cuántos elementos hay en $\{|j_1 j_2 j m\rangle\}$?

(tarea)

Al resolverlo encontramos que $j_{min} = |j_1 - j_2|$

Al sumar 2 momentos angulares (j_1, j_2 fijos)

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \longleftrightarrow |j_1 j_2 j m\rangle$$

$-j_1 \le m_1 \le j_1$	mismo # de	$\lvert j_1 - j_2\rvert \le j \le j_1 + j_2$
$-j_2 \le m_2 \le j_2$	elementos	$m = m_1 + m_2$

Ojo: $J \neq j_1 + j_2$

Para pasar de una base a otra:

Fuerza bruta
- Escribir J^2 y J_z como matriz en la base $\underline{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle}$ y diagonalizar Usando
  - $J_z = J_{1z} + J_{2z}$
  - $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}$

Así obtenemos $|j_1 j_2\, j m\rangle = \sum_{j_1' j_2' m_1 m_2} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1' m_1 j_2' m_2\rangle$

Hay otro método que no requiere diagonalizar. Lo veremos primero con un ejemplo.

Ejemplo $j_1 = \frac{1}{2}$; $j_2 = 1$; $(2j_1+1)(2j_2+1) = 6$ elementos

¿Cuáles son las bases que nos interesan?

$$|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \rightarrow \{ |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, -1\rangle, |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, -1\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, 0\rangle, |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, 1\rangle, |\underline{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1}\rangle \}$$

En la base $|j_1\, j_2\, j\, m\rangle$

Los valores de j son $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

$$\tfrac{1}{2} \leq j \leq 3/2$$
$$\Rightarrow \quad j = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}$$

$$|j\, m\rangle \longrightarrow \{ |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle,$$
$$|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle, |\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, |\underline{\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}}\rangle \}$$

Ahora queremos escribir los $|j\, m\rangle$ en términos de los $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$.

El estado $|j = j_{max}, m = j_{max}\rangle$ se puede identificar fácilmente pues es el único con $m = j_{1max} + j_{2max}$

$$\Rightarrow \underbrace{\overbrace{|\tfrac{3}{2}\, \tfrac{3}{2}\rangle}}_{j\ m} = \sum_{j_1' j_2' m_1 m_2} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1' m_1 j_2' m_2\rangle \overset{m = m_1 + m_2}{=} \underbrace{\overbrace{|\tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\, 1\, 1\rangle}}_{j_1 m_1\, j_2 m_2}$$

Aplicando $J_- = J_x - iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) - i(J_{1y} + J_{2y}) = J_{1-} + J_{2-}$

$$|\tfrac{3}{2}\, \tfrac{3}{2}\rangle \xrightarrow[J_-]{} |\tfrac{3}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle \xrightarrow[J_-]{} |\tfrac{3}{2}\, -\tfrac{1}{2}\rangle \xrightarrow[J_-]{} |\tfrac{3}{2}\, -\tfrac{3}{2}\rangle$$

Con esto obtenemos 4 vectores pero nos faltan los de $j=\frac{1}{2}$.

$$\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle = \alpha\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\;1\;0\right\rangle + \beta\left|\tfrac{1}{2}\,{-\tfrac{1}{2}}\;1\;1\right\rangle$$

sólo estos dos términos satisfacen $m=m_1+m_2$

→ Obtenemos α y β usando que

- Debe estar normalizados
- Debe ser ortogonal a los que ya tenemos. En particular ortogonal a $\left|\tfrac{3}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle$
- Esto lo define salvo por una fase global que elegimos real.

Luego $\left|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle \xrightarrow[J_-]{} \left|\tfrac{1}{2}\;{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle$

Y así obtenemos los 6 vectores.

En la práctica

Mathematica

ClebschGordan

ClebschGordan[$\{j_1, m_1\}, \{j_2, m_2\}, \{j, m\}$]
gives the Clebsch–Gordan coefficient for the decomposition of $|j, m\rangle$ in terms of $|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle$.

Run code block in SymPy Live

```
>>> from sympy.physics.quantum.cg import CG
>>> from sympy import S
>>> cg = CG(S(3)/2, S(3)/2, S(1)/2, -S(1)/2, 1, 1)
>>> cg
CG(3/2, 3/2, 1/2, -1/2, 1, 1)
>>> cg.doit()
sqrt(3)/2
```

Not logged in Talk Contributions Create account Log in

Article Talk Read Edit View history

Table of Clebsch–Gordan coefficients

From Wikipedia, the free encyclopedia

This is a **table of Clebsch-Gordan coefficients** used for adding angular momentum values in quantum mechanics. The overall sign of the coefficients for each set of constant j_1, j_2, j is arbitrary to some degree and has been fixed according to the Condon–Shortley and Wigner sign convention as discussed by Baird and Biedenharn.[1] Tables with the same sign convention may be found in the Particle Data Group's *Review of Particle Properties*[2] and in online tables.[3]

Contents [show]

Formulation [edit]

The Clebsch–Gordan coefficients are the solutions to

$$|j_1,j_2;J,M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\langle j_1,j_2;m_1,m_2 \mid j_1,j_2;J,M\rangle$$

Explicitly:

$$\langle j_1,j_2;m_1,m_2 \mid j_1,j_2;J,M\rangle = \delta_{M,m_1+m_2}\sqrt{\frac{(2J+1)(J+j_1-j_2)!(J-j_1+j_2)!(j_1+j_2-J)!}{(j_1+j_2+J+1)!}}\times \sqrt{(J+M)!(J-M)!(j_1-m_1)!(j_1+m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!}\times \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(j_1+j_2-J-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2+m_2-k)!(J-j_2+m_1+k)!(J}$$

The summation is extended over all integer k for which the argument of every factorial is

Libro de Griffiths

Table 4.7: Clebsch-Gordan coefficients. (A square root sign is understood for every entry; the minus sign, if present, goes *outside* the radical.)