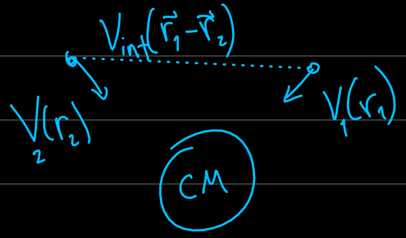
Suma de momentos angulares

Mecánica clásica:

$$\vec{L}_{total} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

constante de movimiento (si no hay fuerzas externas)



- Si $V_{int} = 0$, L_1 y L_2 son constantes de mov.
- Si 1 y 2 interactúan L_1 y L_2 no son ctes de mov per L_{total} sí es.

Mecánica Cuántica

Ejemplo 1

- $H_0 = H_1 + H_2$

- Considerándolo en la representación $\{|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle\}$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 + V(r_1) \quad ; \quad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(r_2)$$

actúa respecto a coordenadas de la partícula 1.

(ahora no hay interacción entre 1 y 2)

$$[\vec{L}_1, H_1] = 0$$

Ejercicio 1 de tarea

(si sólo hay una partícula, su momento angular es una cte de movimiento)

$$[\vec{L}_2, H_1] = 0$$

actúan en espacios distintos

$$(\mathbb{1}_1 \otimes \vec{L}_2)(H_1 \otimes \mathbb{1}_2) - (H_1 \otimes \mathbb{1}_2)(\mathbb{1}_1 \otimes \vec{L}_2) = 0$$

También $\quad [\vec{L}_2, H_2] = [\vec{L}_1, H_2] = 0$

$$[\vec{L}_1, H_0] = [\vec{L}_2, H_0] = 0$$

$\therefore$ $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ son ctes. de mov. de H_0.

¿Qué pasa si agregamos una interacción entre 1 y 2?

$U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$ con $|\vec{r}_1-\vec{r}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

$$H = H_1 + H_2 + U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$$

¿Siguen siendo constantes de movimiento $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$?

$$[\vec{L}_1, H] = [\vec{L}_1, H_1+H_2+U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)] = [\vec{L}_1, U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)]$$

nos fijamos en L_{1z}

$$[L_{1z}, U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)]\varphi(\vec{r}_1) = L_{1z}(U\varphi) - UL_{1z}\varphi = (L_{1z}U)\varphi + \cancel{(L_{1z}\varphi)U} - \cancel{U(L_{1z}\varphi)}$$

Usando la regla para derivar productos

$$L_{1z} = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1)_z = \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

$$[L_{1z}, U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)] = (L_{1z}U) = \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial U}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)$$

usando regla de la cadena

$$= \frac{\hbar}{i}\left(x_1 U'\cdot\frac{y_1-y_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} - y_1 U'\cdot\frac{x_1-x_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right)$$

en general es distinto de cero

$\therefore$ L_{1z} no es cte de mov.

Si consideramos $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$[L_{1z}+L_{2z}, U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)] = \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial U}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial U}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{U'}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\left[x_1(\cancel{y_1}-\cancel{y_2}) - y_1(\cancel{x_1}-\cancel{x_2}) + x_2(\cancel{y_2}-\cancel{y_1}) - y_2(\cancel{x_2}-\cancel{x_1})\right] = 0$$

Análogamente L_x, L_y

$\therefore$ En mecánica cuántica también $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ son ctes de movimiento.

Ejemplo 2: Partícula con espín.

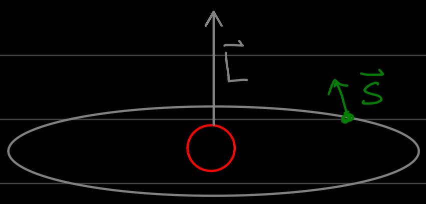
- En un potencial central

(si sólo hay una partícula, su momento angular es una cte de movimiento)

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \qquad [\vec{L}, H_0] = 0$$

actúan en espacios distintos

$$[\vec{S}, H_0] = 0$$



Si agregamos a H_0 un término $H_{so} = \xi(r)\vec{L}\cdot\vec{S}$

$$H = H_0 + H_{so}$$

conmuta con L_z

$$[L_z, H] = [L_z, H_{so}] = \xi(r)[L_z, L_x S_x + L_y S_y + \cancel{L_z S_z}]$$

$$\left([L_i, S_j] = 0 \text{ operan en espacios distintos}\right) = \xi(r) i\hbar (S_x L_y - L_x S_y) \neq 0$$

Analogamente

$$[S_z, H] = \xi(r) i\hbar (L_x S_y - S_x L_y)$$

Al agregar H_{so} a H_0, $\vec{L}, \vec{S}$ dejan de ser constantes de movimiento.

Si definimos $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$;

$$[J_z, H] = [S_z, H] + [L_z, H] = 0$$

$\therefore$ $\vec{J}$ sí es una constante de movimiento de H.

En ambos ejemplos $[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$

$$[\vec{J}_1, H] \neq 0$$
$$[\vec{J}_2, H] \neq 0$$

pero

$$[\underbrace{J_1 + J_2}_{\vec{J}}, H] = 0$$

Suma de momentos angulares cuánticos

> El problema de suma de momentos angulares en mecánica cuántica consta de encontrar una base de e-vectores comunes para J^2 y J_z en términos de e-vectores de J_1^2, J_{1z}, J_2^2 y J_{2z} (con $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$)

Consideramos dos m. a. $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$

Espacio de estados: Para $\vec{J}_1$ $\{|j_1 m_1\rangle\}$

Para $\vec{J}_2$ $\{|j_2 m_2\rangle\}$

Para el sistema compuesto $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ es un e-vector de J_1^2, J_{1z}, J_2^2 y J_{2z}

$$J_1^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$J_{1z}\otimes\mathbb{1}_2 \rightarrow J_{1z}|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$J_2^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$\mathbb{1}_1\otimes J_{2z} \rightarrow J_{2z}|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ es un CCOC en $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{J_1} \otimes \mathcal{E}_{J_2}$

Definimos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \vec{J}_2$

$$(J_x, J_y, J_z) = (J_{1x} + J_{2x}, J_{1y} + J_{2y}, J_{1z} + J_{2z})$$

Habíamos definido a un momento angular como algo que cumple $[A_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k$. ¿$\vec{J}$ es un momento angular?

operan en espacios distintos

$$[J_x, J_y] = [J_{1x}+J_{2x}, J_{1y}+J_{2y}] = [J_{1x}, J_{1y}] + \cancel{[J_{1x}, J_{2y}]}^{\,0} + \cancel{[J_{2x}, J_{1y}]}^{\,0} + [J_{2x}, J_{2y}]$$
$$= i\hbar J_{1z} + i\hbar J_{2z}$$
$$= i\hbar J_z$$

Análogamente los demás casos y $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$

$\therefore$ $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ es un momento angular

$\therefore$ Podemos encontrar e-vectores compartidos de J^2 y J_z.

Nos será útil una expresión para J^2

¿Conmutan? Si: espacios distintos

$$J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)\cdot(\vec{J}_1 + \vec{J}_2) = J_1^2 + J_2^2 + \underbrace{\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2 + \vec{J}_2\cdot\vec{J}_1}_{2\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2}$$

Ojo: $\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2 = J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z}$

$$= \frac{1}{2}\left(J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}\right) + J_{1z}J_{2z}$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + (J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}) + 2J_{1z}J_{2z}$$