

Continuación de vectores y valores propios.

- Teorema de eigenvalores de operadores hermitianos:

- Los eigenvalores de un operador hermitiano son reales
- Los eigenvectores de un operador hermitiano correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales.

Dem. Consideramos los eigenvectores de A

$$\begin{array}{l} A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \quad A|\beta\rangle = b|\beta\rangle \\ \downarrow \text{multiplicando por } \langle\beta| \\ \langle\beta|A|\alpha\rangle = a\langle\beta|\alpha\rangle \\ \downarrow \text{hermitiano} \\ \langle\beta|A^\dagger = b^*\langle\beta| \\ \downarrow \text{multiplicando por } |\alpha\rangle \\ \langle\beta|A|\alpha\rangle = b^*\langle\beta|\alpha\rangle \end{array}$$

$(a - b^*)\langle\beta|\alpha\rangle = 0$

→ Veamos que los eigenvalores son reales

- $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son arbitrarios

- En particular, podemos tomar $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$

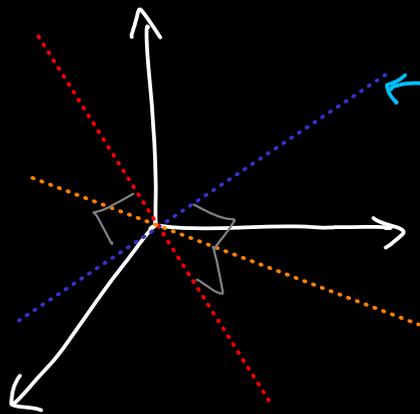
$$(a - a^*)\underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a = a^* \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

→ Veamos que si $a \neq b \Rightarrow |\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son ortogonales

$$\underbrace{(a-b)}_{\neq 0} \langle \alpha | \beta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle = 0 \quad \square$$

-
- A cada vector propio le corresponde 1 valor propio
 - A cada valor propio le pueden corresponder muchos vectores propios
 - El número máximo de eigenvalores distintos que puede tener un operador es la dimensión del espacio.

- Si todos los eigenvalores son distintos (Si $|\alpha\rangle$ es e.V. de A , $c|\alpha\rangle$ también)



eigenespacios para eigenvalores distintos

eigenespacio:
Conjunto de todos los
eigenvectores correspondientes
a un eigenvalor.

- Si los eigenvalores son todos distintos podemos usar los eigenvectores como una base ortogonal.
Ojo: La elección de base no es única

Ventajas de bases de eigenvectores $\{|e_i\rangle\}$ de A , con eigenvalores $\{\lambda_i\}$

- Es fácil aplicar A a un vector expresado en esa base $A|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle \quad A|\psi\rangle = \sum_i c_i A|e_i\rangle = \sum_i c_i \lambda_i |e_i\rangle$$

Si conocemos los e.v. y e.V. de un operador lo podemos representar como

$$A = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i| \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$A|e_j\rangle = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|e_j\rangle = \lambda_j |e_j\rangle$$

En contraste, en una base ortonormal general $\{|u_i\rangle\}$

$$A = \sum_{ij} A_{ij} |u_i\rangle \langle u_j| \quad \text{no es necesariamente diagonal}$$

- Si hay eigenvalores repetidos

Nota: Si dos eigenvectores comparten eigenvalor, combinaciones lineales de ellos también son eigenvectores

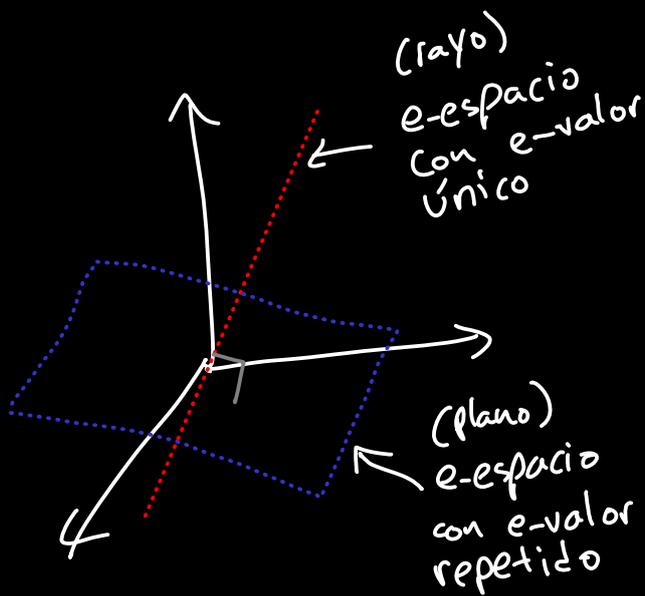
$$A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \quad A|\beta\rangle = a|\beta\rangle$$

↓ por constante

$$A(c|\beta\rangle) = ac|\beta\rangle$$

↓ e.v. de A

$$A(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle) = a(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle)$$



eigenespacios si se repite algún eigenvalor

De todas formas podemos construir una base de e-vectores pero ahora hay más libertad para escogerla.

¿Cómo obtener los e-valores y e-vectores de un operador?

(fuerza bruta)

- Tenemos $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

- Tenemos base ortonormal cualquiera $\{|u_i\rangle\}$

$$\langle u_i | A | \psi \rangle = \lambda \langle u_i | \psi \rangle$$

$$\sum_j \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | \psi \rangle = \lambda \langle u_i | \psi \rangle$$

$$\sum_j A_{ij} \psi_j = \lambda \psi_i = \sum_j \lambda \delta_{ij} \psi_j$$

$$\sum_j (A_{ij} - \delta_{ij} \lambda) \psi_j = 0$$

- Si conociéramos λ , es un sistema de ecuaciones con las ψ_i como incógnitas
- Tiene solución no trivial si $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

polinomio característico

- 1) Encontrar raíces del polinomio $\{\lambda_i\}$
- 2) Para cada λ_i resolvemos el sistema de ecuaciones $\sum_j (A_{ij} - \delta_{ij} \lambda) \psi_j = 0$ y así encontramos los eigenvectores.

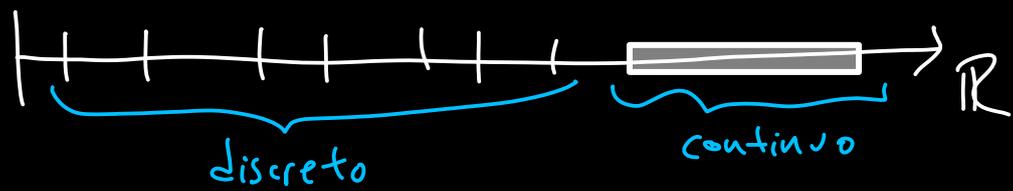
Postulados de la mecánica clásica

- El estado de un sistema a un tiempo t_0 está dado por $2N$ cantidades:
 - N coordenadas generalizadas $q_i(t_0)$
 - N momentos generalizados $p_i(t_0)$
- Cualquier propiedad del sistema se puede determinar si se conoce su estado. Se puede predecir con certeza el resultado de una medición si se conoce.
- La evolución temporal está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange (o por la 2a ley de Newton) y queda determinada por las condiciones iniciales. Es decir al definir las condiciones iniciales se termina el estado del sistema a todo tiempo.

Postulados de la mecánica ~~clásica~~ Cuántica

- ① El estado de un sistema físico es un rayo en un espacio de Hilbert \mathcal{H} y está definido al especificar un ket a un tiempo $|\Psi(t_0)\rangle$
El rayo es $\{c|\Psi(t_0)\rangle\} \forall c \in \mathbb{C}$
- ② Toda cantidad física medible está asociada a un operador $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que es hermitiano.
A esto se le llama un observable. (*)
- ③ Los resultados posibles de hacer una medición de un observable A son sus eigenvalores.
 - (*) Los e-valores de un operador hermitiano siempre son reales.
 - Si el espectro de A es discreto, los resultados que podemos obtener son discretos (están cuantizados)

4) Este postulado tiene distintas formas dependiendo del sistema en cuestión.



-(Espectro de A : discreto y no degenerado)
 todos los e-valores son distintos

Considerando un estado $|\psi\rangle$ normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle=1$) y un operador A con espectro discreto $\{a_i\}$ con todos los e-valores distintos y eigenvectores $\{|e_i\rangle\}$ normalizados

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$$

entonces, la probabilidad de obtener el resultado a_i en una medición

es
$$P(a_i) = |\langle e_i | \psi \rangle|^2 = |c_i|^2$$

Ejemplos: Si $|\psi\rangle = |e_0\rangle$ ($c_0=1, c_i=0$ si $i \neq 0$)

$$P(a_0) = |c_0|^2 = 1^2 ; P(a_{i \neq 0}) = 0$$

Si $|\psi\rangle = \frac{|e_0\rangle + |e_1\rangle}{\sqrt{2}}$; $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_{i \neq 0,1} = 0$

$$P(a_0) = |c_0|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} ; P(a_{i \neq 0,1}) = 0$$

$$P(a_1) = |c_1|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Comentarios postulado (4)

- La suma de probabilidades de todos los posibles resultados debe ser 1

- Las fases globales no importan:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$$

$$|\psi'\rangle = e^{i\theta} |\psi\rangle = \sum_i e^{i\theta} c_i |e_i\rangle$$

esto es una fase global

$$P(a_i) = |c_i|^2$$

$$P(a_i) = |e^{i\theta} c_i|^2 \\ = |e^{i\theta}|^2 |c_i|^2 \\ = |c_i|^2$$

- Las fases relativas sí tienen significado físico

$$|\psi\rangle = e^{i\theta} \left(\frac{|e_0\rangle + e^{i\phi} |e_1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

fase global

fase relativa

(4) (para espectros continuos no degenerados)

$$A|v_\alpha\rangle = \alpha|v_\alpha\rangle$$

Parámetro continuo

$$|\psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |v_\alpha\rangle$$

La densidad de probabilidad de obtener un resultado entre α y $\alpha+d\alpha$ es

$$dP(\alpha) = |c(\alpha)|^2 = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2$$