Mecánica Cuántica

Semestre 2020-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 5
Entrega: 27/05/2020

Para esta tarea usaremos la notación de suma de momentos angulares que usamos en clase. En la que

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

cuyos números cuánticos asociados son j, m, j_1, m_1 y j_2, m_2 respectivamente.

Ejercicio 1: Suma de momentos angulares **20 Puntos**

Al sumar dos momentos el número cuántico de magnitud de momento angular total j cumple que:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2.$$

En clase demostramos la cota superior argumentando que

$$j_{\max} = m_{\max} = m_{1\max} + m_{2\max} = j_1 + j_2.$$

Sin embargo, quedó pendiente mostrar la cota inferior. Muestra que $|j_1 - j_2| \leq j$ para que el número de elementos en las bases $\{|j_1\, j_2\, j\, m\rangle\}$ y $\{|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle\}$ sea el mismo.
Nota: puedes usar que $j \leq j_1 + j_2$.

Ejercicio 2: Conumtador de momento angular **10 Puntos**

1. Calcula $\left[J^2, J_{1z}\right]$ y $\left[J^2, J_{2z}\right]$. ¿Conmutan estos operadores?
2. Usa los resultados del inicio anterior para mostrar que $\left[J^2, J_z\right] = 0$.

Ejercicio 3: Suma de momentos angulares con $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$ **25 Puntos**

Considera dos momentos angulares $\mathbf{J}_1$ y $\vec{J}_2$ cuya magnitud es $j_1 = j_2 = 1$.

a. Enlista todos los elementos de la base de eigenvectores comunes de J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}.

b. Enlista todos los elementos de la base de eigenvectores comunes de J_1^2, J_2^2, J^2, J_z.

c. Escribe $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 2\rangle$ y $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = -2\rangle$ en términos de la base $|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle$.

d. Encuentra $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 0\rangle$ en términos de la base $|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle$ usando el operador de descenso J_-.

e. Escribe $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 0\rangle$ en términos de la base $|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle$ usando tu tabla/programa preferido para obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan. Indica qué utilizaste.

Ejercicio 4: Operador de permutación **15 Puntos**

El operador de permutación que intercambia el estado de dos sistemas cuánticos está definido por

$$P_{12}\,|\alpha\beta\rangle = |\beta\alpha\rangle\,,$$

donde la primera posición del ket corresponde al primer sistema y la segunda posición corresponde al segundo sistema. Considerando dos sistemas de dos niveles, la base ortonormal del espacio de estados se puede escribir como

$$\{|{+}{+}\rangle\,, |{+}{-}\rangle\,, |{-}{+}\rangle\,, |{-}{-}\rangle\}.$$

Escribe la representación matricial de P_{12}.

Ejercicio 5: Dos espines **30 Puntos**

Considera un sistema conformado por partículas con espín 1/2 de las cuales ignoramos sus variables orbitales. El Hamiltoniano del sistema es

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$$

donde S_{1z} y S_{2z} son los operadores de proyección usuales y ω_1 y ω_2 son constantes reales.

a. El estado inicial del sistema en $t = 0$ es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle]$$

al tiempo t se mide el observable S^2. ¿Qué resultados se pueden obtener?¿Con qué probabilidad se obtiene cada resultado?

b. Para un estado inicial arbitrario, ¿Qué frecuencias de oscilación aparecen en la evolución de $\langle S^2\rangle$?