Mecánica Cuántica

Semestre 2020-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 3
Entrega: 03/04/2020

Ejercicio 1: Esquema de interacción **20 Puntos**

En clase discutimos los esquemas de Heisenberg y Schrödinger para describir la dinámica de un sistema. En el de Schrödinger los operadores son estáticos mientras los kets evolucionan en el tiempo y en el esquema de Heisenberg se toma en el enfoque opuesto. En este ejercicio desarrollarás el esquema de interacción que es un caso intermedio entre ambos.

Considera un sistema físico arbitrario, donde su Hamiltoniano es $H_0(t)$ y su operador de evolución asociado $U_0(t, t')$ con $U_0(t, t) = \mathbb{1}$.

a Muestra que la ecuación de Schrödinger implica que el operador de evolución cumple

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t') = H_0(t) U_0(t, t').$$

Suponiendo que el sistema es perturbado por una "interacción" $W(t)$ de tal modo que su Hamiltoniano total se convierte en

$$H(t) = H_0(t) + W(t)$$

El vector de estado en el esquema de interacción es $|\psi_I(t)\rangle$, que en términos del vector de estado en el esquema de Schrödinger es $|\psi_I(t)\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle$.

b Muestra que la ecuación de evolución para $|\psi_I(t)\rangle$ es

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi_I(t)\rangle = W_I(t) |\psi_I(t)\rangle \, ,$$

donde $W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) W(t) U_0(t, t_0)$.

c Explica cualitativamente por qué cuando la perturbación $W(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$ la dinámica del vector $|\psi_I(t)\rangle$ es mucho más lenta que la de $|\psi_S(t)\rangle$.

En estos dos incisos se muestra la utilidad del esquema de interacción: Conociendo la dinámica correspondiente a $H_0(t)$, en el esquema de interacción la ecuación de Schrödinger restante sólo involucra a $W(t)$.

Ejercicio 2: Estado de un espín **15 Puntos**

En clase hablamos del operador asociado al observable de espín $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde, en la base de eigenvectores de S_z denotados por $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, las representaciones matriciales de las componentes son

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos operadores podemos obtener el observable de espín en una dirección arbitraria $\mathbf{u}$ determinada por los ángulos θ y φ por medio de

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = S_u = S_z \sin\theta \cos\varphi + S_y \sin\theta \sin\varphi + S_z \cos\theta$$

Muestra que

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$
$$|-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$

son eigenvectores de S_u.

Ejercicio 3: Estados de oscilador armónico **15 Puntos**

Considera un oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω. Su estado inicial es

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle,$$

donde $|\varphi_n\rangle$ son los eigenvectores del Hamiltoniano con eiganvalor $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

a ¿Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}$ de que al medir la energía al tiempo $t > 0$ obtengamos un resultado mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $\mathcal{P} = 0$ ¿Qué coeficientes c_n son distintos de cero?

b De ahora en adelante, supongamos que sólo c_0 y c_1 son distintos de cero. Escribe la condición de normalización para $|\psi(0)\rangle$ y el valor esperado $\langle H\rangle$ en términos de c_0 y c_1. Agregando el requisido de que $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcula $|c_0|^2$ y $|c_1|^2$.

c Como el estado inicial $|\psi(0)\rangle$ está definido salvo por una fase global, podemos fijar a c_0 como real y positivo. Si escribimos $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$ y suponemos que $\langle H\rangle = \hbar\omega$ y que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, calcula θ_1.

Ejercicio 4: Estados coherentes **50 Puntos**

Usando la notación usual de oscilador armónico:

a Muestra directamente que un estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle ,$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ es un egienvector del operador de descenso a.

b Calcula el valor esperado de X y P si el sistema de encuentra en el estado coherente $|\alpha\rangle$.

c Calcula el valor esperado de X^2 y P^2 si el sistema de encuentra en el estado coherente $|\alpha\rangle$ y calcula $\Delta X \Delta P$.

d Muestra que si un oscilador armónico inicia en un estado coherente $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, después de un tiempo $t > 0$ el estado $|\psi(t)\rangle$ seguirá siendo un estado coherente. Es decir. seguirá siendo un eigenvector de a pero con distinto eigenvalor. ¿Cuál es este nuevo eigenvalor?

e Usa los resultados anteriores para obtener $\langle X \rangle (t)$ y $\langle P \rangle (t)$ para un oscilador armónico cuya condición inicial es un estado coherente.

f Calcula el producto escalar $\langle \alpha | \alpha' \rangle$ entre dos estados coherentes. ¿Forman los estados coherentes una base ortonormal?