Mecánica Cuántica

Semestre 2020-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 2
Entrega: 13 marzo 2020

Ejercicio 1: Pozo infinito **20 Puntos**

El objetivo de este ejercicio es repasar las soluciones y argumentos asociados al problema del pozo cuadrado infinito. Considera una partícula en una dimensión cuyo Hamiltoniano es $H = \frac{P_x^2}{2m} + V(X)$ con

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{de otro modo} \end{cases}$$

a. Escribe la ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniando, $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, en términos de la función de onda en la base de posición $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ (i.e. escribe la "ecuación de Schrödinger independiente del tiempo").

b. Muestra que si E debe cumplir $E > 0$ para que la solución obtenida sea normalizable.

c. Fuera del pozo $\psi(x) = 0$. Encuentra las eigenfunciones y eigenvalores que son solución de ecuación del inciso a. Presenta tu solución de forma normalizada. (*Nota:* tu solución debe satisfacer las condiciones de frontera).

d. Muestra que las soluciones obtenidas son ortonormales.

Ejercicio 2: Corriente de probabilidad **20 Puntos**

Definiendo $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}$, con S y ρ funciones reales.

a. Muestra que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho\frac{\boldsymbol{\nabla} S}{m}$.

b. Muestra que si de dos funciones $\psi(\mathbf{r})$ y $\psi'(\mathbf{r})$ obtenemos las mismas $\rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ entonces $\psi(\mathbf{r})$ y $\psi'(\mathbf{r})$ difieren sólo por una fase global.

c. Dadas $\rho(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ funciones arbitrarias muestra que se les puede asociar un estado cuántico $\psi(\mathbf{r})$ sólo si $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, donde $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})/\rho(\mathbf{r})$ es la velocidad asociada con el fluido de probabilidad.

Ejercicio 3: El conmutador de $[P, V(X)]$ **20 Puntos**

En este ejercicio mostrarás que $[P, V(X)] = -i\hbar V'(X)$.

a. Usando que $[X, P] = i\hbar$ muestra que $[P, X^n] = -i\hbar n X^{n-1}$. (*Sugerencia:* Usa inducción matemática.)

b. Usa el inciso anterior para mostrar que $[P, V(X)] = -i\hbar V'(X)$ (*Sugerencia:* Escribe $V(x)$ usando su expansión en serie.)

Ejercicio 4: Exponencial de un operador **10 Puntos**

Con A un operador Hermitiano y su ecuación de eigenvalores de la forma

$$A\left|u_n\right\rangle = a_n\left|u_n\right\rangle,$$

considera un vector arbitrario $|\psi\rangle$.

a. Escribe a $|\psi\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores de A.

b. Expresa $e^A|\psi\rangle$ como combinación lineal de eigenvecotes de A. (*Sugerencia:* escribe e^A como serie de Taylor).

Ejercicio 5: Relación de incertidumbre generalizada **30 Puntos**

En este ejercicio demostrarás la relación de incertidumbre generalizada para dos operadores hermitianos A y B,

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [A, B]\rangle\right)^2,$$

donde $\Delta A^2 = \left\langle (A - \langle A\rangle)^2 \right\rangle$ y $\Delta B^2 = \left\langle (B - \langle B\rangle)^2 \right\rangle$.

a. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 \leq \langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle$

   I. Definiendo $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + \lambda|\phi_2\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, encuentra la desigualdad resultante de $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$.

   II. La desigualdad obtenida es válida para toda λ. En particular para $\lambda = -\langle\phi_2|\phi_1\rangle / \langle\phi_2|\phi_2\rangle$. Usa esto para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

b. Usando esta desigualdad para $|f\rangle = (A - \langle A\rangle)|\psi\rangle$ y $|g\rangle = (B - \langle B\rangle)|\psi\rangle$ obtén que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2.$$

c. Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2$.

d. Muestra que $\langle f|g\rangle = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$ y $\langle g|f\rangle = \langle BA\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle$.

e. Concluye que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle [A, B]\rangle\right)^2.$$

Nota: el conmutador de dos operadores Hermitianos tiene un factor de i por lo que la cantidad dentro de el paréntesis es real y por tanto su cuadrado es positivo.