Mecánica Cuántica

Semestre 2020-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 1
Entrega: 26/02/2020

Ejercicio 1: Experimento de la doble rendija **20 Puntos**

Lee el artículo *Controlled double-slit electron diffraction* y responde lo siguiente:

a. ¿Por qué es necesario que el aparato experimental sea "imposiblemente pequeño" (como decía Feynmann) para observar difracción?

b. ¿Cómo se detectaron los electrones en este experimento?¿Qué elemento del esquema de detección amplificaba la señal lo suficiente para lograr detectar electrones individuales?

c. ¿De qué manera este experimento ilustra la dualidad onda-partícula?

Ejercicio 2: Operadores y conmutadores **10 Puntos**

Sean A y B operadores. Muestra que:

a. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

b. $[A, B] = -[B, A]$.

c. $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

d. $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

Ejercicio 3: Base de eigenvectores **20 Puntos**

Considera un observable H y una base de sus eigevectores $|\phi_n\rangle$. Dando por hecho que los $|\phi_n\rangle$ forman una base discreta ortonormal considera el operador $U(m, n)$ definido como

$$U(m, n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$$

a. Calcula el adjunto $U^\dagger(m, n)$ de $U(m, n)$.

b. Calcula el conmutador $[H, U(m, n)]$.

c. Muestra que $U(m, n)U^\dagger(p, q) = \delta_{nq}U(m, p)$.

d. Si A es un operador cuyos elementos de matriz son $A_{mn} = \langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$ muestra que

$$A = \sum_{m,n} A_{mn}U(m, n).$$

Ejercicio 4: Valores y vectores propios **10 Puntos**

Considera el operador cuya matriz, escrita en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, se escribe como

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a. Escribe σ_y usando notiación de Dirac en términos de los vectores de la base.

b. ¿Es σ_y Hermitiano?

c. Encuentra los valores y vectores propios de σ_y (escribiendo su expansión en términos de la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$).

d. Encuentra las matrices que representan a los proyectores a estos eigenvectores.

e. Verifica que los eigenvectores encontrados satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completud.

Ejercicio 5: Eigenespacios **10 Puntos**

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Describe el espacio vectorial de eigenvectores correspondiente a cada uno de sus eigenvalores.

Ejercicio 6: Conjunto completo de observables que conmutan **20 Puntos**

Considera un sistema físico cuyo espacio de estados es generado por los vectores base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Tomando la base en este orden, definimos dos operadores por su representación matricial como

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ω_0 y b son constantes.

a. ¿Son H y B Hermitianos?

b. Muestra que H y B conmutan. Encuentra una base de eigenvectores comunes a H y B.

c. De los conjuntos de operadores $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$, ¿cuáles forman un conjunto completo de observables que conmutan?

Ejercicio 7: Postulados de la Mecánica Cuántica **10 Puntos**

Tomando en cuenta el cuarto postulado para el caso de un espectro discreto no degenerado, muestra que la suma de las probabilidades de obtener todos los resultados es 1. ¿Qué significa este resultado?