Mecánica Cuántica

Semestre 2020-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea Examen I
Entrega: 25/03/2020

Ejercicio 1: Un sistema de 4 estados **40 Puntos**

Considera un sistema de 4 estados posibles cuya base está dada por $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. Además tenemos dos observables

$$A = a_1(|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|) + a_2(|1\rangle\langle 1| + |4\rangle\langle 4|)$$
$$B = b_1 |1\rangle\langle 1| + b_2 |2\rangle\langle 2| + b_3 |3\rangle\langle 3| + b_4 |4\rangle\langle 4|$$

Y los siguientes estados normalizados

$$|\psi_0\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle + \gamma |3\rangle + \delta |4\rangle$$
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle).$$

a. Escribe A y B en notación matricial en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$.

b. Encuentra la probabilidad de obtener el resultado b_4 tras medir B si el sistema se encuentra en los estados $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$. ¿En qué estado quedaría el sistema después de obtener este resultado en cada caso?

c. Encuentra la probabilidad de obtener el resultado a_1 tras medir A si el sistema se encuentra en los estados $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$. ¿En qué estado quedaría el sistema después de obtener este resultado en cada caso?

d. Con el observable A no es posible distinguir si el sistema se encuentra en el estado $|1\rangle$, $|4\rangle$ o $|\phi_1\rangle$. Propón un observable que al medirlo junto con A se pueda especificar por completo el estado de un sistema después de la medición. ¿Es único? Justifica tu respuestas.

Ejercicio 2: Evolución temporal **40 Puntos**

Considera un sistema de cuatro estados que describimos en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. En esta base, podemos escribir al Hamiltoniano como

$$H = \hbar\Delta_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\Delta_2 |2\rangle\langle 2| + \frac{\hbar\Omega}{2}(|3\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 3|),$$

con Δ_1, Δ_2 y Ω distintos entre sí.

a. Escribe H en notación matricial.

b. Encuentra los egienvalores y eigenvecotres de H.

c. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|\psi(0)\rangle = |4\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|4\rangle$ al tiempo t?
(*Hint: escribe $|\psi(0)\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores del Hamiltoniano.*)

d. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|1\rangle$ al tiempo t?

Ejercicio 3: Representación de posición y momento **10+30 Puntos**

a. Calcula el conmutador $\left[X^2, P^2\right]$ en términos de X y P.

b. En clase mostramos que $\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. En este inciso mostrarás una relación análoga para la representación $\{|p\rangle\}$. Muestra que

I Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ la función de onda en el espacio de momento el efecto de aplicar el operador X es:

$$\langle p|X|\psi\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p)$$

II Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ y $\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$ funciones de onda en el espacio de momento, los elementos de matriz del operador X están dados por:

$$\langle\varphi|X|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p\, \varphi^*(p) i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p),$$