

- Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo.

- El problema más sencillo dependiente del tiempo.

$(E_2 > E_1)$

$$H_0 = E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

$$V(t) = \delta e^{i\omega t} |1\rangle\langle 2| + \delta e^{-i\omega t} |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & \delta e^{i\omega t} \\ \delta e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

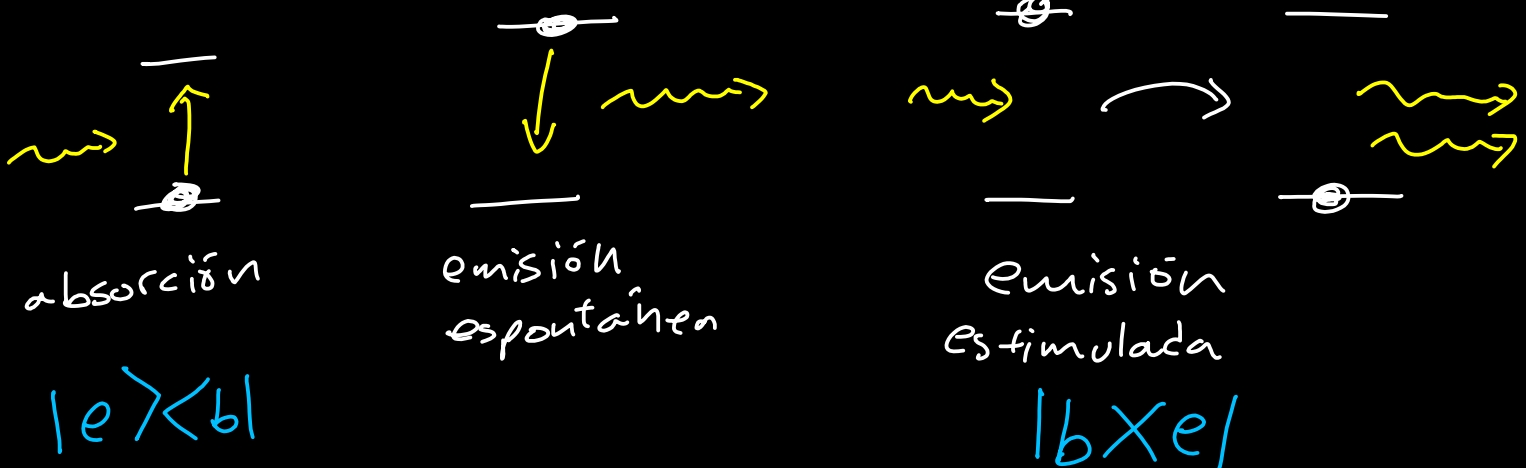
átomos-luz, RMN, etc...

$|1\rangle, |2\rangle$ e.v. de H_0 .

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$$

con $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$

¿Qué esperan que pase?



$$i\hbar \partial_t |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

$$\downarrow$$

$$\dot{C}_1(t) = \dots$$

$$\dot{C}_2(t) = \dots$$

fórmula de Rabi

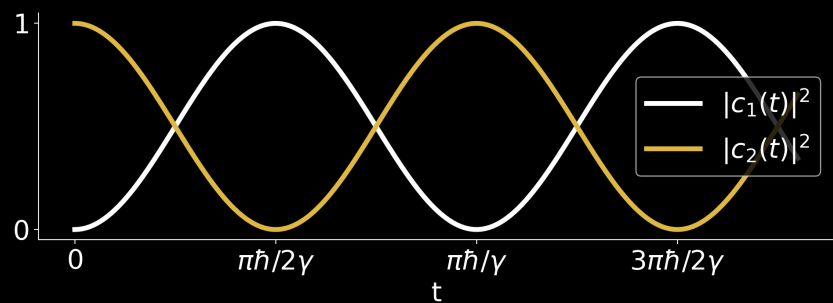
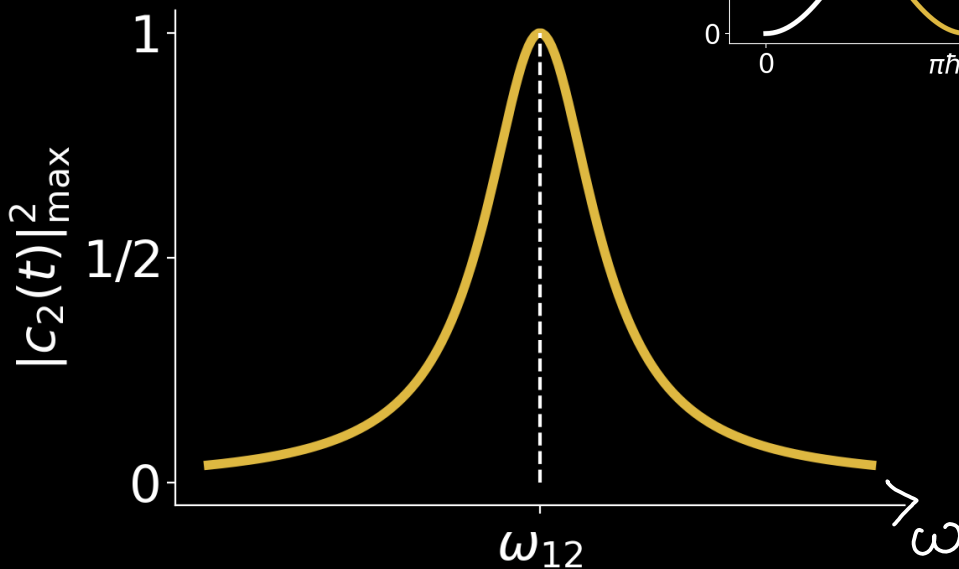
$$|C_2(t)|^2 = \frac{\delta^2/\hbar^2}{\delta^2/\hbar^2 + (\omega - \omega_{21})^2/4} \sin^2 \left\{ \left[\frac{\delta^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right]^{1/2} t \right\}$$

$$|C_1(t)|^2 = 1 - |C_2(t)|^2$$

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

- Solución oscilatoria con frecuencia

$$\Omega = \sqrt{\frac{\delta^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}}$$



- Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo

- El enfoque de Dirac: $\left(\begin{array}{l} \text{no lo} \\ \text{usamos} \\ \text{directamente} \end{array} \right)$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle$$

$$c_n(t) = \underbrace{c_n^{(0)}}_{\text{condición inicial}} + \underbrace{c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots}_{\text{correcciones perturbativas}}$$

- Lo haremos a partir del operador de evolución y obtener los $c_n(t)$ al final.

$$H = H_0 + V(t) \leftarrow \text{"pequeña"}$$

conocemos sus e.v. $|n\rangle$ y sus e.v. E_n

- En el esquema de interacción

$$U = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} ; U_0 = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{tarea 3})$$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_I\rangle = U_0^\dagger |\psi_0\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I\rangle = V_I(t) |\psi_I\rangle$$

$$V_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) V(t) U_0(t, t_0)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0)$$

$$U_I(t_0, t_0) = \mathbb{1}$$

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle$$

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} U_I(t', t_0) dt' = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') U(t', t_0) dt'$$

$$U_I(t, t_0) - \underbrace{U_I(t_0, t_0)}_{\mathbb{1}} =$$

Forma integral de ecuación del operador de evolución temporal

$$\underline{U_I(t, t_0)} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \underline{U_I(t', t_0)} dt'$$

Podemos encontrar una sol. aproximada es iterando esta ecuación.

$$\begin{aligned}
 U_I(t, t_0) &= \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \left[\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} V_I(t'') U_I(t'', t_0) dt'' \right] dt \\
 &= \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{orden 0}} - \underbrace{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t')}_{\text{orden 1}} + \underbrace{\left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'')}_{\text{orden 2}} \\
 &\quad + \dots + \underbrace{\left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^{(n)})}_{\text{orden } n} + \dots
 \end{aligned}$$

Serie de Dyson

- Probabilidad de transición
 Si partimos de un estado $|i\rangle$
 ¿Cuál es la prob. de encontrar al sistema en un estado $|f\rangle$ después de un tiempo t ?

$$U_I(t, t_0) \rightarrow |\psi_I(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$$

$$|\langle f | \psi(t) \rangle|^2$$

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |i\rangle = \sum_n \underbrace{|n\rangle \langle n|}_{\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}} U_I(t, t_0) |i\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle &= \langle n | e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} U e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} | i \rangle \\ &= e^{i(E_n - E_i)(t-t_0)/\hbar} \langle n | U | i \rangle \end{aligned}$$

$$\therefore |\langle n | U_I | i \rangle|^2 = |\langle n | U | i \rangle|^2$$

$$\underline{|\Psi_I(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle}$$

$$\therefore c_n(t) = \langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle$$

$$P(i \rightarrow f) = |c_f(t)|^2$$

Regresando a la serie de Dyson

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)}(t) + \dots \quad V_I = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$c_f^{(0)} = \langle f | \mathbb{1} | i \rangle = \delta_{if} \quad \text{orden 0} \quad \frac{E_f - E_i}{\hbar}$$

$$c_f^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle f | V_I(t') | i \rangle dt' = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{fi} t'} V_{fi}(t') dt' \quad \text{orden 1}$$

• $C_f^{(1)}$ es la transformada de Fourier de $V_{fi}(t) = \langle f | V(t) | i \rangle$ multiplicado por $\chi_{[t_0, t]}(t') = \begin{cases} 1 & \text{si } t' \in [t_0, t] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$C_f^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \langle f | V_I(t') V_I(t'') | i \rangle$$

\uparrow
 $\sum_m |m \times m| = 1$

$$= \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_m \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{i\omega_m t'} V_{fm}(t') e^{i\omega_m t''} V_{mi}(t'')$$

$$P(i \rightarrow f) \underset{f \neq i}{=} |C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + \dots|^2$$

- Perturbación constante para $t > 0$

$$V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & \text{(independiente de } t) \quad t \geq 0 \end{cases}$$

↖ operador

Estado inicial $|i\rangle$

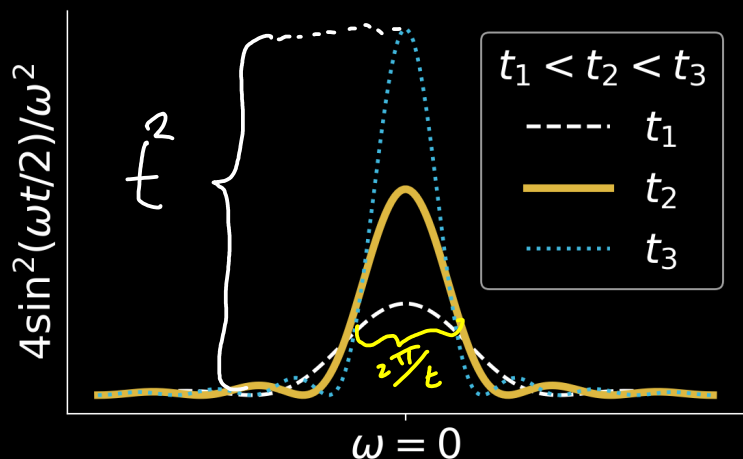
$$C_n^{(0)} = \delta_{ni}$$

$$C_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_0^t e^{i\omega n t'} dt' = \frac{V_{ni}}{E_n - E_i} (1 - e^{i\omega n t})$$

$$P(i \rightarrow f) = |C_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{|V_{fi}|^2}{(E_f - E_i)^2} \sin^2\left(\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar}\right)$$

Para visualizar $\omega = \frac{E_n - E_i}{\hbar}$

$$|C_f^{(1)}(t)|^2 \sim \frac{4 \sin^2(\omega t/2)}{\omega^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\approx} \frac{4 \left(\frac{\omega t}{2}\right)^2}{\omega^2} = t^2$$



• Al aumentar t $|C_f^{(1)}(t)|^2$ es apreciable sólo para estados que cumplen

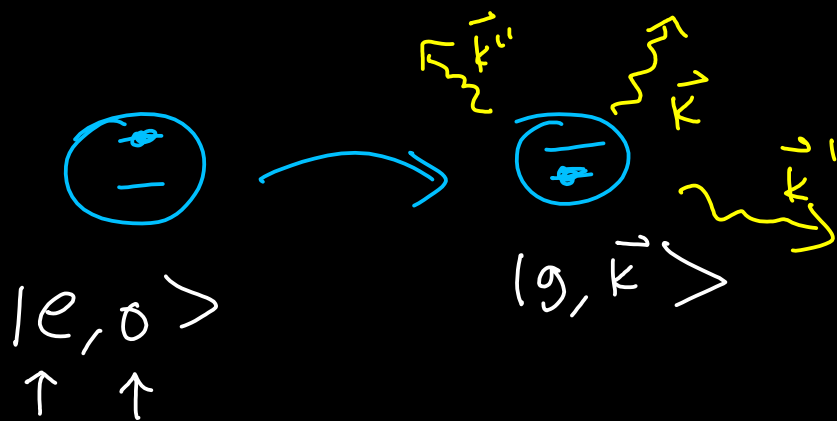
$$\omega \sim \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t \Delta E \sim \hbar$$

↖ duración de perturbación ↖ cambio de energía durante transición

- Cuando hablamos de un continuo de estados finales nos interesa

$$\sum_{n, E_n \approx E_i} |C_n^{(1)}|^2$$

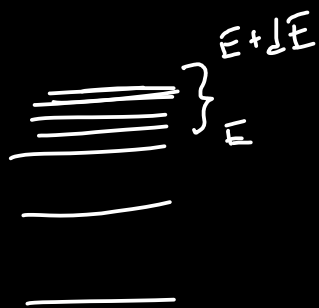
(Probabilidad de acabar en un estado n con $E_n \approx E_i$)



Se suele escribir esta suma en términos de la densidad de estados en el intervalo $(E, E+dE)$

$$\rho(E) dE$$

de estados en $(E, E+dE)$



↑ densidad de estados

Suma sobre n → Suma sobre E

- Así:

$$\sum_{n, E_n \approx E_i} |C_n^{(1)}|^2 = \int dE_n \rho(E_n) |C_n^{(1)}|^2$$

$$= 4 \int \sin^2 \left(\frac{E_n - E_i}{2\hbar} t \right) \frac{|V_{ni}|^2}{(E_n - E_i)^2} \rho(E_n) dE_n$$

Usando $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \delta(x)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(E_n - E_i)^2} \sin^2 \left(\frac{E_n - E_i}{\hbar} t \right) = \frac{\pi t}{\hbar} \delta(E_n - E_i)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |C_n^{(1)}(t)|^2 = \left(\frac{\pi \hbar}{\hbar} \right) |V_{ni}|^2 \rho(E_i) t$$

• Aunque

$$|C_n^{(1)}(t)|^2 \underset{E_n = E_i}{=} \frac{1}{\hbar^2} |V_{ni}| t^2 \sim t^2$$

tomando en cuenta todos los estados finales posibles

$$\sum_{n, E_n \approx E_i} |C_n^{(1)}|^2 \sim t$$

Esto se debe a que el ancho de $|C_n^{(1)}(t)|^2$ es $\sim 1/t$
la altura es $t^2 \rightarrow \text{área} \sim t$

- Tasa de transición:
Regla de oro de Fermi

• Prob de transición por unidad de tiempo.

$$\Gamma_{i \rightarrow \{n\}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_r |C_n^{(r)}|^2 \right) \leftarrow \text{es cte.}$$

↑ conjunto de estados finales
linear en t

$$\Gamma_{i \rightarrow \{n\}} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 \rho(E_n)$$

- Calcular tasa de decaimiento de átomo excitado
- Decaimiento radiactivo
- ⋮

A menudo se escribe

$$\Gamma_{i \rightarrow n} = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) |V_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i)$$

donde todavía falta integrar con $\int dE_n \rho(E_n) \Gamma_{i \rightarrow n}$