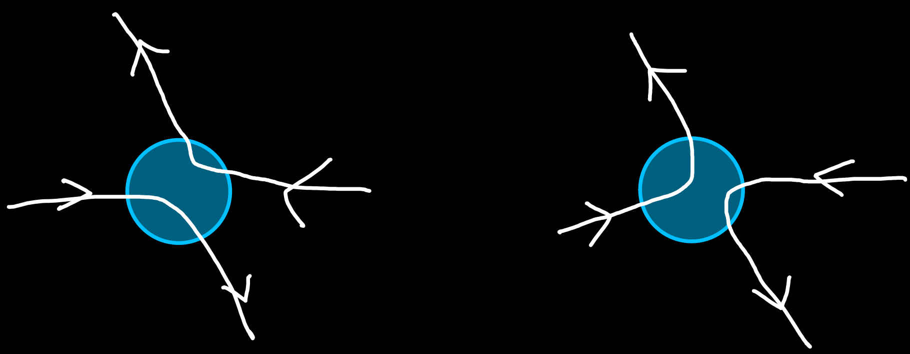
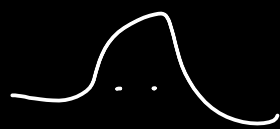
Partículas idénticas

- En mecánica clásica podemos distinguir partículas idénticas: seguir trayectoria
  marcarlas.

- En cuántica, partículas idénticas son indistinguibles:
  - No hay trayectorias
  - No podemos distinguir



$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$



- Consideremos dos partículas:
  - Partícula 1 caracterizada por $|k'\rangle_1$

    k' → todos los índices asociados a un C.C.O.C.
  - Partícula 2 caracterizada por $|k''\rangle_2$

Por ejemplo: dos partículas no interactuantes en oscilador armónico 3D.

$k' = n', \ell', m'$; $k'' = n'', \ell'', m''$

→

- El estado del sistema completo

$$|k'\rangle_1 |k''\rangle_2$$

partícula 1 partícula 2

(Nota: podríamos no escribir los subíndices si acordamos en el orden de los kets)

- También podemos considerar

$$|k''\rangle_1 |k'\rangle_2$$

- Aunque las partículas sean indistinguibles

$$|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 \neq |k''\rangle_1 |k'\rangle_2 \quad (\text{si } k' \neq k'')$$

(de hecho son ortogonales).

- Si medimos a este sistema de dos partículas y obtenemos k' y k''

¿Cómo saber si el estado es

$$|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 \quad \text{o} \quad |k''\rangle_1 |k'\rangle_2 \quad ?$$

(incluso podría ser una comb. lineal).

Todos los kets de la forma

$$c_1 |k'\rangle_1 |k''\rangle_2 + c_2 |k''\rangle_1 |k'\rangle_2$$

dan el mismo resultado al medir el C.C.O.C.

- A esto se le llama degeneración de intercambio.

- Esto es un problema pues un C.C.O.C. no determinan el estado del sistema.
- Para ver cómo la naturaleza ~~se~~ nos libra de este problema hablaremos de la simetría de permutación.

Simetría de permutación

Definición: Operador de permutación

$$P_{12}|k'\rangle_1|k''\rangle_2 = |k''\rangle_1|k'\rangle_2$$

Notamos que $P_{12} = P_{21} = P_{12}^{-1}$; $P_{12}^2 = \mathbb{1}$

- Intercambio 1 y 2.

- En la práctica encontramos observables con etiquetas de partícula:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

- Consideremos (por simplicidad) que un sólo observable A determina el estado de cada partícula.

$$A_1 |a'\rangle_1 |a''\rangle_2 = a' |a'\rangle_1 |a''\rangle_2$$

$$A_2 |a'\rangle_1 |a''\rangle_2 = a'' |a'\rangle_1 |a''\rangle_2$$

Aplicando P_{12} de ambos lados

$$P_{12} A_1 \underbrace{P_{12}^{-1} P_{12}}_{\mathbb{I}} |a'\rangle_1 |a''\rangle_2 = a' P_{12} |a'\rangle_1 |a''\rangle_2$$

$$\Rightarrow P_{12} A_1 P_{12}^{-1} |a''\rangle_1 |a'\rangle_2 = a' |a''\rangle_1 |a'\rangle_2$$

Para ser consistente con $P_{12} A_1 P_{12}^{-1} = A_2$

$\therefore$ P_{12} cambia las etiquetas de partícula de los observables.

- Consideramos H para partículas idénticas

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V_{int}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + \underline{V_{ext}(\vec{x}_1) + V_{ext}(\vec{x}_2)}$$

Nota: los operadores de partículas idénticas deben aparecer de manera simétrica en H. (A) cambiar $1 \longleftrightarrow 2$ H debe quedar igual)

Claramente $P_{12} H P_{12}^{-1} = H \Rightarrow [H, P_{12}] = 0$

$\therefore$ P_{12} es una constante de mov.

Los e.v. P_{12} son $+1$ y -1. $(P_{12}^2 = \mathbb{1})$

Si $|\phi_\pm\rangle$ es e.v. de P_{12}.

$$P_{12}|\phi_+\rangle = +|\phi_+\rangle \quad \text{(simétrico)}$$
$$P_{12}|\phi_-\rangle = -|\phi_-\rangle \quad \text{(antisimétrico)}$$

Los eigenvectores de P_{12} son de la forma:

$$|k' k''\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle_1|k''\rangle_2 + |k''\rangle_1|k'\rangle_2\right)$$

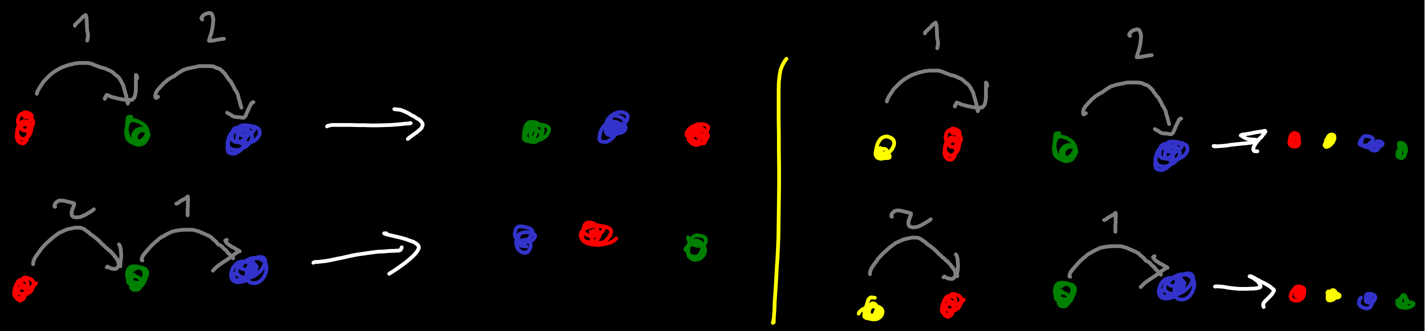
$$|k' k''\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle_1|k''\rangle_2 - |k''\rangle_1|k'\rangle_2\right)$$

Si consideramos más partículas

$$P_{ij}|k'\rangle_1|k''\rangle_2|k'''\rangle_3 \ldots |k^i\rangle_i \ldots |k^j\rangle_j \ldots$$
$$= |k'\rangle_1|k''\rangle_2|k'''\rangle_3 \ldots |k^j\rangle_i \ldots |k^i\rangle_j \ldots$$

$$P_{ij}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \text{e.v. } \pm 1$$

En general $[P_{ij}, P_{kl}] \neq 0$



Si tenemos 3 partículas:

Hay $3! = 6$ Kets de la forma:

$$|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 |k'''\rangle_3$$
$$\vdots$$
$$|k''\rangle_1 |k'\rangle_2 |k'''\rangle_3$$

(con k', k'', k''' diferentes)

Al buscar estados totalmente simétricos o anti-simétricos obtenemos sólo una de c/u.

$$|k'\,k''\,k'''\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big\{ |k'\rangle_1 |k''\rangle_2 |k'''\rangle_3 + |k''\rangle_1 |k'\rangle_2 |k'''\rangle_3 + |k''\rangle_1 |k'''\rangle_2 |k'\rangle_3 + |k'''\rangle_1 |k''\rangle_2 |k'\rangle_3 + |k'''\rangle_1 |k'\rangle_2 |k''\rangle_3 + |k'\rangle_1 |k'''\rangle_2 |k''\rangle_3 \Big\}$$

$$|k' \, k'' \, k'''\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{6}} \Big\{ +|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 |k'''\rangle_3$$
$$- |k''\rangle_1 |k'\rangle_2 |k'''\rangle_3$$
$$+ |k''\rangle_1 |k'''\rangle_2 |k'\rangle_3$$
$$- |k'''\rangle_1 |k''\rangle_2 |k'\rangle_3$$
$$+ |k'''\rangle_1 |k'\rangle_2 |k''\rangle_3$$
$$- |k'\rangle_1 |k'''\rangle_2 |k''\rangle_3 \Big\}$$

determinante de Slater

$$|k' \, k'' \, k'''\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} |k'\rangle_1 & |k''\rangle_1 & |k'''\rangle_1 \\ |k'\rangle_2 & |k''\rangle_2 & |k'''\rangle_2 \\ |k'\rangle_3 & |k''\rangle_3 & |k'''\rangle_3 \end{vmatrix}$$

Tanto $|k' \, k'' \, k'''\rangle_+$, $|k' \, k'' \, k'''\rangle_-$ y los otros 4 sin paridad definida darían el mismo resultado al medir el C.C.O.C. asociado a k', k'', k'''.

Postulado de simetrización

- Los sistemas conformados por N partículas idénticas sólo ocupan estados que son totalmente simétricos o anti-simétricos.

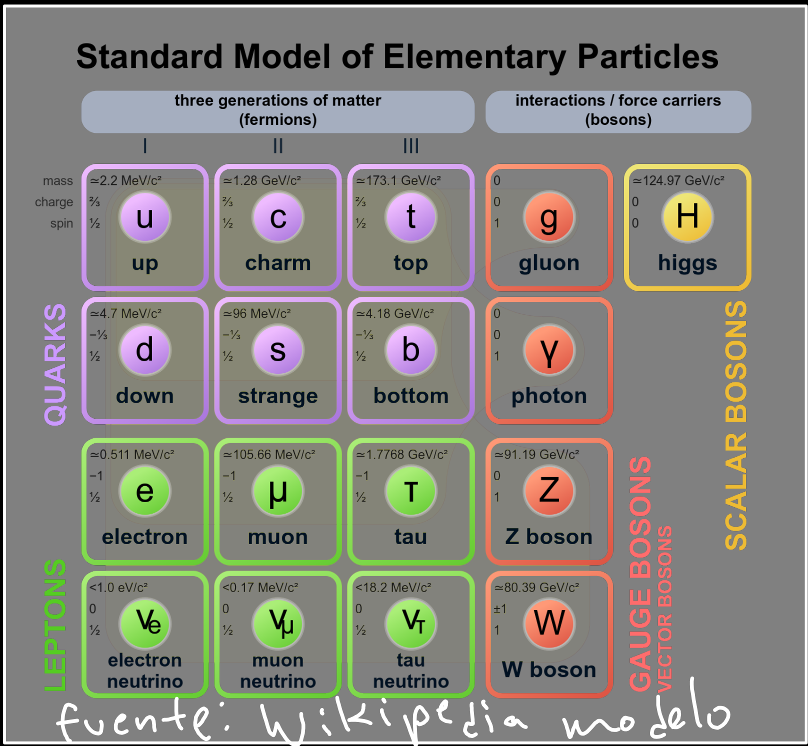
- Estados simétricos:
  - Estadística Bose-Einstein
  - bosones
  - Espín entero

- Estados anti simétrico:
  - Estadística de Fermi-Dirac
  - fermiones
  - Espín semi entero

Ejemplos:

Pueden ser partículas compuestas.

fermiones	bosones
e^-	^{87}Rb
p^+	^{7}Li
n	
núcleo de ^{3}He	
^{6}Li	



fuente: Wikipedia modelo estándar.

Una consecuencia es el principio de exclusión de Pauli

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle_1 |k''\rangle_2 - |k''\rangle_1 |k'\rangle_2\right)$$

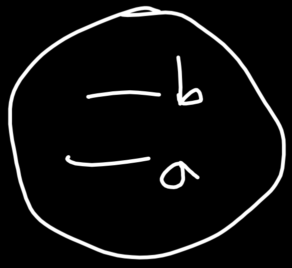
$$\text{si } k' = k'' \Rightarrow |\psi\rangle = 0$$

Ningún par de electrones puede ocupar el mismo estado.

→ Esto es la base de la estructura atómica/molecular

Estadísticas de bosones/fermiones.

Si hay dos posibles estados a, b



Para fermiones: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle_1 |b\rangle_2 - |b\rangle_1 |a\rangle_2\right)$

Para bosones:

$|a\rangle_1 |a\rangle_2, \quad |b\rangle_1 |b\rangle_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle_1 |b\rangle_2 + |b\rangle_1 |a\rangle_2\right)$

Partículas "clásicas" (Maxwell-Boltzmann)

$|k'\rangle |k''\rangle, \quad |k''\rangle |k'\rangle, \quad |k'\rangle |k'\rangle, \quad |k''\rangle |k''\rangle$

Condensado de Bose-Einstein

Pred 1924
obs. 1995

- Ocupación macroscópica del estado base para $T < T_c$