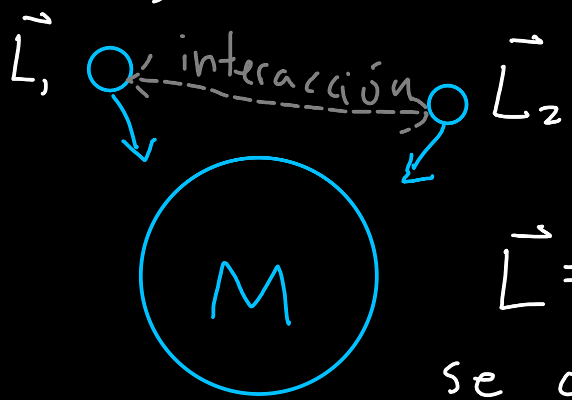
Suma de momentos angulares II

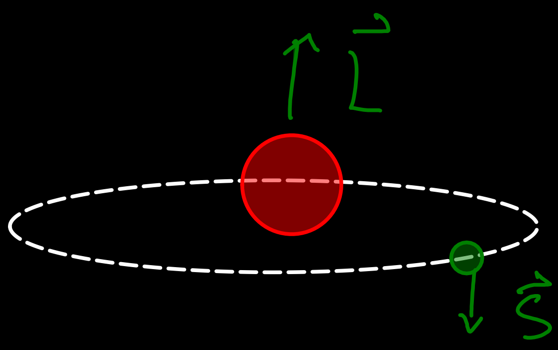
- Motivación: momento angular total se conserva si no hay fuerzas externas.

- Aplicaciones
  - Sistemas de varias partículas iteractuantes



$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ se conserva.

  - Una partícula con varios m.a. asociados



$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ es const. de mov. aunque $\vec{L}$ y $\vec{S}$ no

En general tenemos

$J_1^2, J_{1z} \; \{|j_1, m_1\rangle\}$ $\qquad$ $J_2^2, J_{2z} \; \{|j_2, m_2\rangle\}$

- ¿Cómo describir el momento angular total?

- El espacio para describir al sistema completo es el generado por

$$\{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle\}$$

$$\uparrow \text{notación}$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

En $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ sabemos cómo actúan

$$J_1^2,\ J_{1z},\ \underbrace{J_{1+},\ J_{1-}}_{},\ \underbrace{J_{1x},\ J_{1y}}_{},\ J_2^2,\ J_{2z},\ J_{2+}, J_{2-},\ J_{2x},\ J_{2y}$$

comb. lin.

$$J_1^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$\vdots$$

$$J_{2\pm} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)}\ |j_1 m_1 j_2 m_2 \pm 1\rangle$$

En el espacio generado por $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ $\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ es CCOC.

- Definimos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \vec{J}_2$

$\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ son m.a. $\Rightarrow$ $\vec{J}$ es m.a.

i.e. $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$

$\therefore$ Existe una base de e.$\vec{v}$ comunes a J^2 y J_z $\quad |j\, m\rangle$

J^2 y J_z conmutan con J_1^2 y J_2^2

$$|j_1 j_2 j m\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{notación}}}{=} |j m\rangle$$

¿Cómo relacionar las dos bases?

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \longleftrightarrow |j_1 j_2 j m\rangle$$

Base desacoplada   Base acoplada

Ejemplo con $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$

Base desacoplada

$$\{ |{+}{+}\rangle, |{+}{-}\rangle, |{-}{+}\rangle, |{-}{-}\rangle \} = \{ |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle : \epsilon_1 = \pm, \epsilon_2 = \pm \}$$

$+ \rightarrow m = 1/2$

$- \rightarrow m = -1/2$

¿Qué debemos hacer para obtener la base acoplada en términos de la desacoplada?

1. Escribir J^2 y J_z como matriz en la base $\{|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle\}$

② Diagonalizando estas matrices obtenemos e.V. J^2, J_z en términos de la base $\{|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle\}$

Paso 1:

$$J_z = \hbar \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |++\rangle & |+-\rangle & |-+\rangle & |--\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

$$\langle \epsilon_1' \epsilon_2' | J_z | \epsilon_1 \epsilon_2 \rangle$$

$$J^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \epsilon_1' \epsilon_2' | J^2 | \epsilon_1 \epsilon_2 \rangle$$

$$(\bar{J}_1 + \bar{J}_2)^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2 \bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2$$

$$\underbrace{J_{1x} J_{2x} + J_{1y} J_{2y}}_{} + J_{1z} J_{2z}$$

Escribirlos usando $J_{1+}, J_{1-}, J_{2+}, J_{2-}$

Paso 2: Diagonalizar

Sólo hace falta diagonalizar esto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sus e.V̄ son $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

con e.v $\quad 2 \quad\quad 0$

$$\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

Los e.V. de J^2 y J_z en la base $\{|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle\}$ son

$$|++\rangle$$
$$|--\rangle$$
$$\frac{1}{2}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

¿A qué e.v. de J^2 y J_z corresponden?

Queremos asociar a c/e.V̄. con un $|jm\rangle$.

Si les aplicamos J^2 y J_z vemos que e.V. escupe.

$$|++\rangle \begin{cases} J^2 |++\rangle = \hbar^2\, 2\, |++\rangle = \hbar^2\, 1(1+1)\, |++\rangle \\ J_z |++\rangle = (J_{1z} + J_{2z})\, |++\rangle = \left(\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2}\right) |++\rangle \\ \qquad = \hbar\, 1\, |++\rangle \end{cases}$$

$$J^2 \frac{\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)}{\sqrt{2}} = \hbar^2 \underset{\substack{\uparrow \\ 1(1+1) \Rightarrow j=1}}{2} \left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$J_z \left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \hbar \underset{\substack{\nearrow \\ m=0}}{0} \left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Base acoplada		Base desacoplada
$\|j=1, m=1\rangle$	$=$	$\|++\rangle$
$\|j=1, m=-1\rangle$	$=$	$\|--\rangle$
$\|j=1, m=0\rangle$	$=$	$\frac{\|+-\rangle + \|-+\rangle}{\sqrt{2}}$
$\|j=0, m=0\rangle$	$=$	$\frac{\|+-\rangle - \|-+\rangle}{\sqrt{2}}$

Suma de momentos angulares arbitrarios. (j_1, j_2 fijos)

$$\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle ; m_1 = -j_1, \ldots, j_1 ; m_2 = -j_2, \ldots, j_2 \}$$

¿Cómo escribir $|j_1 j_2 j m\rangle = |jm\rangle$ en términos de $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$?

$$\mathbb{1} = \sum_{j_1' j_2'} \sum_{m_1, m_2} |j_1' m_1 j_2' m_2\rangle\langle j_1' m_1 j_2' m_2|$$

$$\mathbb{1} = \sum_{j_1' j_2'} \sum_{j, m} |j_1' j_2' j m\rangle\langle j_1' j_2' j m|$$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{j_1' j_2' m_1 m_2} |j_1' m_1 j_2' m_2\rangle \underbrace{\langle j_1' m_1 j_2' m_2 | j_1 j_2 j m\rangle}_{\text{número complejo}}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

Conversamente

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{j_1' j_2'} \sum_{j, m} |j_1' j_2' j m\rangle \underbrace{\langle j_1' j_2' j m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle}$$

Los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) son cero a menos que

$$\underbrace{j_1 = j_1'}_{1}, \quad \underbrace{j_2 = j_2'}_{2}, \quad \underbrace{m = m_1 + m_2}_{3}$$

Dem. 1) $\langle j_1 j_2 j m | J_1^2 | j_1' m_1 j_2' m_2\rangle =$

$$= \hbar^2 j_1'(j_1'+1)\langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2\rangle$$

$$= \hbar^2 j_1(j_1+1)\langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2\rangle$$

$\therefore$ $j_1 = j_1'$ ó $\langle j_1 j_2 j m | j_1' m_1 j_2' m_2\rangle = 0$

2) análogo

3) $\langle j_1 j_2 j m | J_z | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle =$

$J_z = J_{1z} + J_{2z}$

$$= \hbar(m_1+m_2)\langle j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar m \langle j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$\therefore$ $m = m_1 + m_2$ ó $\langle j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = 0$

Con esto podemos encontrar que

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j \leq m \leq j$$

Sale de que $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ es m.a.

Conociendo j_1, j_2 ¿cómo encontrar los valores posibles de j, m?

1.- $m_{max} = m_{1\,max} + m_{2\,max} = j_{max}$

$$m_{1\,max} = j_1, \quad m_{2\,max} = j_2$$

$$\Rightarrow \quad j_{max} = j_1 + j_2$$

2.- El espacio para j_1 y j_2 fijos tiene dimensión: $(2j_1+1)(2j_2+1)$

¿Cuál es la dim del espacio $\{ |j m\rangle : j = j_0, \ldots, j_1+j_2, -j \leq m \leq j \}$?

$$\sum_{j=j_0}^{j_1+j_2} 2j+1 = 2\left(\sum_{j=j_0}^{j_1+j_2} j\right) + j_1 + j_2 - j_0$$

Para que esto sea igual a $(2j_1+1)(2j_2+1)$ es necesario que $j_0 = |j_1 - j_2|$

(tarea)