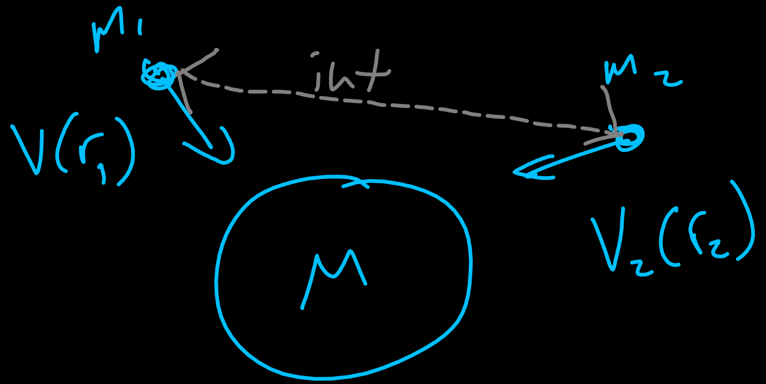
Suma de momentos angulares

Mecánica Clásica

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

- En ausencia de fuerzas externas tangenciales, $\vec{L}_{tot}$ es una cte de movimiento.

- Pensando en 2 partículas



$M >> m_1, m_2$

- Si 1 y 2 no interactúan $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ son constantes de mov.

- Si interactúan $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ ya no son const. de mov. $\vec{L}_{tot}$ sigue siendo const. de mov.

Mecánica cuántica:

Ejemplo 1: dos partículas interactuantes

El mismo sistema que en el ejemplo clásico.

En la representación $\{|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle\}$

$$H_0 = H_1 + H_2$$
$$= H_1 \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes H_2 \quad \text{(sin interacción)}$$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 + V(r_1) \quad ; \quad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(r_2)$$

respecto $\vec{r}_1$ respecto $\vec{r}_2$

Función de onda $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

Pot. central

Habíamos visto que $[\vec{L}_1, H_1] = 0$

además $[\vec{L}_1, H_2] = 0$

distintos espacios

$\therefore [\vec{L}_1, H_0] = 0$, ie. $\vec{L}_1$ es c.de mov. si no hay interacción

$\therefore \vec{L}_2$ es c.de mov. si no hay interacción.

Repaso c. mov.

$$U = e^{-iHt/\hbar} = \underline{1 - \frac{iHt}{\hbar} + \ldots}$$

$$[U, H] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = 0$$

$$[A, f(A)] = 0$$

$$\Uparrow$$

$$[A, H] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t) = -\frac{i}{\hbar}\langle\underline{[A,H]}\rangle + \left\langle\underline{\frac{\partial A}{\partial t}}\right\rangle$$

cero para c. de mov.

Agreguemos interacción.

$$u(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) \qquad ; \; |\vec{r}_1-\vec{r}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

Hamiltoniano total

$$H = H_1 + H_2 + u(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) \qquad \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1, \quad \vec{P}_1 = -i\hbar\nabla_1$$

- $[\vec{L}_1, H] = [\vec{L}_1, u(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)]$

Nos fijamos en $L_{1z} = \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$

$$[L_{1z}, H] = [L_{1z}, u(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)] = L_{1z}u - uL_{1z}$$

$$[L_{1z}, u]\psi = L_{1z}u\psi - uL_{1z}\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial(u\psi)}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial}{\partial x_1}(u\psi) - x_1u\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + y_1u\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial u}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = u' \cdot \frac{y_1-y_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = u' \cdot \frac{x_1-x_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

$$\therefore [L_{1z}, u] = \frac{\hbar}{i}\frac{u'}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\left(x_1(y_1-y_2) - y_1(x_1-x_2)\right)$$

$$\neq 0$$

L_{1x} y L_{1y} análogo

$\therefore \vec{L}_1$ no es constante de mov.

$\vec{L}_2$ análogo.

Consideremos $\underline{\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2}$

$$(L_x, L_y, L_z) = (L_{1x} + L_{2x},\ L_{1y} + L_{2y},\ L_{1z} + L_{2z})$$

$$[L_z, U] = [L_{1z} + L_{2z}, U] = [L_{1z}, U] + [L_{2z}, U]$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{U'}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}\left[x_1(\cancel{y_1} - \cancel{y_2}) - y_1(\cancel{x_1} - \cancel{x_2}) + x_2(\cancel{y_2} - \cancel{y_1}) - y_2(\cancel{x_2} - \cancel{x_1})\right] = 0$$

Análogamente L_x, L_y

$\therefore$ También en mecánica cuántica $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ es c. de mov.

Ejemplo 2: Partícula con espín en potencial central

Potencial central

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \qquad [\vec{L}, H_0] = 0$$

distinto espacio

$$[\vec{S}, H_0] = 0$$

$\therefore \vec{L}$ y $\vec{S}$ son c. de mov.

Agregamos a H_0 un término $H_{SO}=\xi(r)\vec{L}\cdot\vec{S}$ de acoplamiento espín órbita.

$$H = H_0 + H_{SO}$$

problema

$$[L_z, H] = [L_z, H_{SO}] = \xi(r)[L_z, L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z]$$

$$= \xi(r) i\hbar (L_y S_x - L_x S_y) \neq 0$$

$\therefore \vec{L}$ no es c. de mov al incluir H_{SO}

$$[S_z, H] = [S_z, H_{SO}] = \xi(r) i\hbar (L_x S_y - L_y S_x)$$

$\therefore \vec{S}$ no es c. de mov al incluir H_{SO}

Si hacemos $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$$[J_z, H_{SO}] = [L_z, H_{SO}] + [S_z, H_{SO}] = 0$$

Análogamente J_x, J_y

$\therefore \vec{J}$ es constante de movimiento.

En ambos ejemplos: Si no hay fuerzas externas el momento angular total es constante de mov.

$$[\vec{J}_1, H] \neq 0$$

$$[\vec{J}_2, H] \neq 0$$

$$[\vec{J}_1 + \vec{J}_2, H] = 0$$

El problema de suma de momentos angulares en m.c. consta de encontrar una base de e.V. para J^2 y J_z en términos de e.V. de $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$

- Suma de momentos angulares cuánticos

Consideramos 2 m.a. $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$

Espacio de estados: Bases

Para $\vec{J}_1$: $\{|j_1 m_1\rangle\}$; Para $\vec{J}_2$ $\{|j_2 m_2\rangle\}$

Para el sistema completo

$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ e.V. de $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$

$$J_1^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

J_{1z} $\vdots$ etc.

En el espacio generado por $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ $\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ son un CCOC.

Definimos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

¿Es $\vec{J}$ es un momento angular?

J_i : i-ésima componente de $\vec{J}$

J_{1i} : iésima componente de $\vec{J}_1$

J_{2i} : iésima componente de $\vec{J}_2$

$$[J_i, J_j] = [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j} + J_{2j}] =$$

distinto espacio

$$= [J_{1i}, J_{1j}] + \cancel{[J_{2i}, J_{1j}]} + \cancel{[J_{1i}, J_{2j}]} + [J_{2i}, J_{2j}]$$

$$= i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k} + i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$= i\hbar \epsilon_{ijk} (J_{1k} + J_{2k}) = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

Suma de momentos angulares es un momento angular.

$$J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2) \cdot (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)$$

$$= J_1^2 + J_2^2 + \underbrace{\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 + \vec{J}_2 \cdot \vec{J}_1}_{\text{¿Conmutan? Si, distinto espacio}} = J_1^2 + J_2^2 + \underline{2\,\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2}$$

Ojo: $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = J_{1x} J_{2x} + J_{1y} J_{2y} + J_{1z} J_{2z}$

$$= \frac{1}{2}\left(J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+} \right) + J_{1z} J_{2z}$$

Sabemos cómo actúa sobre $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

Recordando

$[\vec{J}_1, J_1^2] = 0$; $[\vec{J}_2, J_2^2] = 0$

Además $[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$ (distinto espacio)

$[\vec{J}_1, J_2^2] = 0$; $[\vec{J}_2, J_1^2] = 0$

$\Rightarrow [\vec{J}, J_1^2] = 0 \Rightarrow [J^2, J_1^2] = 0$, $[J^2, J_2^2] = 0$

$\Rightarrow [\vec{J}, J_2^2] = 0$

$$[J_z, J_{1z}] = \cancel{[J_{1z}, J_{1z}]} + \cancel{[J_{2z}, J_{1z}]} = 0$$

$\therefore \{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$ conmutan entre sí.

Nota: $\underline{[J^2, J_{1z}]} \neq 0$ (tarea)

- Cambio de base

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \longleftrightarrow |j_1 j_2 j m\rangle$$

Sabemos que $\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ son un C.C.O.C.

Vimos que $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$ conmuta.

Veremos que además son un CCO.

- Ejemplo con dos espines:

Supongamos $\vec{J}_1 = \vec{S}_1$; $\vec{J}_2 = \vec{S}_2$; $\vec{J} = \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

Base $|\underset{1/2}{j_1} m_1 \underset{1/2}{j_2} m_2\rangle : \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$

$|j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = -\frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2}, m_2 = +\frac{1}{2}\rangle$

Denotamos a los elementos de la base $|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle$ con $\epsilon_i = \pm$

$$S_z|\epsilon_1\epsilon_2\rangle = \left(S_{1z}+S_{2z}\right)|\epsilon_1\epsilon_2\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)|\epsilon_1\epsilon_2\rangle$$

$\therefore$ $|\epsilon_1\epsilon_2\rangle$ son e.$\bar{V}$ de S_z.

$$S_z|\epsilon_1\epsilon_2\rangle = \hbar m|\epsilon_1\epsilon_2\rangle$$

$\epsilon_1=\epsilon_2=-1$

$m=-1, 0, +1$

$\epsilon_1=-1$ $\epsilon_2=1$ o $\epsilon_1=1$ $\epsilon_2=-1$

$\epsilon_1=\epsilon_2=+1$

$$S_z = \hbar \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |++\rangle & |+-\rangle & |-+\rangle & |--\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(diagonal)

¿Cómo es S^2?

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$$

$$S^2|++\rangle = 2\hbar^2|++\rangle$$

$$S^2|+-\rangle = \hbar^2\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$S^2|+-\rangle = \hbar^2\left(|-+\rangle + |+-\rangle\right)$$

$$S^2|--\rangle = 2\hbar^2|--\rangle$$

Representación matricial S^2

$$S^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|++\rangle \quad |+-\rangle \quad |-+\rangle \quad |--\rangle$

Eigenvectores normalizados

$|S\, m\rangle = |s_1 s_2\, S\, m\rangle$

$|m_1\, m_2\rangle = |s_1 m_1 s_2 m_2\rangle$

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|+-\rangle - |-+\rangle\,\right]$$

$\uparrow\downarrow \quad \uparrow\uparrow$

$S = 0,\ 1$

$$|1\,1\rangle = |++\rangle$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|+-\rangle + |-+\rangle\,\right]$$

$$|1\,{-1}\rangle = |--\rangle$$

$m = 0,\ \begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$

$s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$

$m_1 = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$m_2 = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$