Producto tensorial II

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{estados} \\ \text{sistema 1}}}{\overset{\dim = N_1}{\mathcal{E}_1}} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{estados} \\ \text{sistema 2}}}{\overset{\dim = N_2}{\mathcal{E}_2}} = \overset{\dim = N_1 \times N_2}{\mathcal{E}}$$

$\mathcal{E}$ ← estados sistema combinado

$$|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1 \qquad |\varphi\rangle \in \mathcal{E}_2$$

$$|\psi\rangle|\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \in \mathcal{E}$$

notación $= |\psi\,\varphi\rangle$

Producto tensorial:

- Lineal respecto a escalares
- Distributivo respecto a suma de vectores
- Si $\{|v_i\rangle\}$ es base de $\mathcal{E}_1$
  $\{|u_j\rangle\}$ es base de $\mathcal{E}_2$
  $\{|v_i\rangle \otimes |u_j\rangle\}$ es base de $\mathcal{E}$

Si $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow |\psi\rangle|\varphi\rangle \in \mathcal{E}$

Si $|\chi\rangle \in \mathcal{E} \not\Rightarrow |\chi\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle$ con $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_2$

Ejemplo

Base de $\mathcal{E}_1$ $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ ortonormales

Base de $\mathcal{E}_2$ $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ ortonormales

Ejemplo de vector en $\mathcal{E}$ que no es de la forma $|\psi\rangle|\varphi\rangle$:

$$\frac{|1a\rangle + |2b\rangle}{\sqrt{2}}$$

Producto tensorial en notación matricial:

$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle \in \mathcal{E}_1$; $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

$|\varphi\rangle = \gamma|a\rangle + \delta|b\rangle \in \mathcal{E}_2$; $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \alpha\gamma|1a\rangle + \beta\gamma|2a\rangle + \delta\alpha|1b\rangle + \delta\beta|2b\rangle$$

$$= (\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle) \otimes (\gamma|a\rangle + \delta|b\rangle)$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha\gamma \\ \beta\gamma \\ \delta\alpha \\ \delta\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \\ \tilde{\delta}\end{pmatrix}$$

El orden de la base

$$\underbrace{|1a\rangle, |2a\rangle, |1b\rangle, |2b\rangle}_{\text{La base en } \mathcal{E} \text{ tiene 4 elementos}}$$

Producto escalar en $\mathcal{E}$

Si $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \in \mathcal{E}_1$

$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \in \mathcal{E}_2$

$$\langle \psi_1 \varphi_1 | \psi_2 \varphi_2 \rangle = \underbrace{\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle}_{\mathcal{E}_1} \underbrace{\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle}_{\mathcal{E}_2}$$

$$\langle \psi_1 \varphi_1 | \left(\frac{|\psi_2 \varphi_2\rangle + |\psi_3 \varphi_3\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\langle \psi_1 \varphi_1 | \psi_2 \varphi_2 \rangle + \langle \psi_1 \varphi_1 | \psi_3 \varphi_3 \rangle}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo

$\langle 1a | 2b \rangle = \langle 1 | 2 \rangle \langle a | b \rangle$

$\langle 1 | b \rangle$ ó $\langle 2 | b \rangle$ no tiene sentido porque pertenecen a distintos espacios.

- Producto tensorial de operadores

Consideremos $A: \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_1$

Def: La extensión de A a $\mathcal{E}$ es $\tilde{A}$ y actúa así:

Si $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_1$, $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_2$

$$\tilde{A}|\psi\rangle|\varphi\rangle = (A|\psi\rangle)\otimes|\varphi\rangle$$

Como A es lineal esto se generalita a combinaciones lineales

Análogamente si $B:\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_2$ definimos $\tilde{B}$

→ Definimos el producto tensorial de A y B como

$$(A\otimes B)(|\psi\rangle|\varphi\rangle) = (A|\psi\rangle)\otimes(B|\varphi\rangle)$$

→ Podemos escribir la extensión de A en $\mathcal{E}$ como $A\otimes\mathbb{1}_2 = \tilde{A}$

$$(A\otimes\mathbb{1}_2)(|\psi\rangle\otimes|\varphi\rangle) = (A|\psi\rangle)\otimes(\mathbb{1}_2|\varphi\rangle)$$
$$= (A|\psi\rangle)\otimes|\varphi\rangle$$

Notación

$$\tilde{A} = A\otimes\mathbb{1}_2 = A$$
$$\tilde{B} = \mathbb{1}_1\otimes B = B$$

- Conmutadores y producto tensorial

$$[\tilde{A},\tilde{B}] = [A\otimes \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_1 \otimes B] = [A,B]$$

$$= (A\otimes \mathbb{1}_2)(\mathbb{1}_1\otimes B) - (\mathbb{1}_1\otimes B)(A\otimes \mathbb{1}_2)$$

$$= (A\mathbb{1}_1)\otimes(\mathbb{1}_2 B) - (\mathbb{1}_1 A)\otimes(B\mathbb{1}_2)$$

$$= A\otimes B - A\otimes B = 0$$

Otra manera de verlo: $(\tilde{A}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\,;\ \tilde{B}:\mathcal{E}\to\mathcal{E})$

$$\tilde{A}\tilde{B}|v_i u_j\rangle = (A|v_i\rangle)\otimes(B|u_j\rangle)$$

$$\tilde{B}\tilde{A}|v_i u_j\rangle = \tilde{B}[(A|v_i\rangle)\otimes|u_j\rangle]$$

$$= (A|v_i\rangle)\otimes(B|u_j\rangle)$$

- Proyectores

$$|\psi_1\varphi_1\rangle\langle\psi_2\varphi_2| : \mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$$

$$|\psi_1\varphi_1\rangle\langle\psi_2\varphi_2| = |\psi_1\rangle\langle\psi_2| \otimes |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|$$

- Ejemplo: $A = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

$$B = |a\rangle\langle a| = \begin{array}{cc|c} |a\rangle & |b\rangle & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \begin{matrix}\langle a| \\ \langle b|\end{matrix} \end{array}$$

$$A|1a\rangle = \big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big)\,|1a\rangle$$

$$\cancel{\langle 1|1a\rangle}$$

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1}_2$$

$$\tilde{A}|1a\rangle = \big(A|1\rangle\big) \otimes \big(\mathbb{1}_2|a\rangle\big)$$

$$= \Big[\big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big)|1\rangle\Big]|a\rangle$$

$$= |2a\rangle$$

$$\tilde{A} = \big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big) \otimes \big(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\big)$$

$$= \big(|1a\rangle\langle 2a| + |2a\rangle\langle 1a| + |1b\rangle\langle 2b| + |2b\rangle\langle 1b|\big)$$

$$\mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2 = \big(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\big) \otimes \big(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\big)$$

$$= |1a\rangle\langle 1a| + |1b\rangle\langle 1b| + |2a\rangle\langle 2a| + |2b\rangle\langle 2b|$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

A veces es cómodo renombrar a la base:

$$|1a\rangle, |2a\rangle, |1b\rangle, |2b\rangle \to |\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle, |\delta\rangle$$

- ¿Que pasa con e.V. y e.v. al hablar de producto tensorial?

de veces que se repite el e.v. a_n.

$i = 1, 2, \ldots, g_n$

$$A|\psi_n^i\rangle = a_n|\psi_n^i\rangle$$

$$\tilde{A}|\chi\rangle = \lambda|\chi\rangle \qquad |\chi\rangle \in \mathcal{E}$$

Notemos que $\underbrace{|\psi_n^i\rangle}_{\mathcal{E}_1}\underbrace{|\varphi\rangle}_{\mathcal{E}_2}$ es e.V. de $\tilde{A}$

$$\tilde{A}|\psi_n^i\rangle|\varphi\rangle = (A|\psi_n^i\rangle) \otimes (\mathbb{1}_2|\varphi\rangle)$$
$$= a_n|\psi_n^i\rangle|\varphi\rangle$$

Observaciones:

- El espectro de $\tilde{A}$ en $\mathcal{E}$ es el mismo que de A en $\mathcal{E}_1$
- Si $A: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1$ es observable en $\mathcal{E}_1$, $\tilde{A}$ es observable en $\mathcal{E}$
- Si a_n tiene degeneración g_n en $\mathcal{E}_1$; tiene degeneración $g_n \times N_2$

- Eigenvalores de $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$

$$= A \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes B$$

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

$$B|\varphi_m\rangle = b_m|\varphi_m\rangle$$

$\tilde{A}$ y $\hat{B}$ conmutan

$|\psi_n \varphi_m\rangle$ es e.V. de $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$

$$\tilde{A}|\psi_n \varphi_m\rangle = a_n|\psi_n \varphi_m\rangle$$

$$\tilde{B}|\psi_n \varphi_m\rangle = b_m|\psi_n \varphi_m\rangle$$

$$\tilde{C}|\psi_n \varphi_m\rangle = (\tilde{A}+\tilde{B})|\psi_n \varphi_m\rangle$$

$$= (a_n + b_m)|\psi_n \varphi_m\rangle$$

Los eigenvalores de $\tilde{C}$ es la suma de e.v. de A y B.

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$$

base $\mathcal{E}_1$: $\{|\psi_i\rangle\}$ base $\mathcal{E}_2$: $\{|\varphi_j\rangle\}$

base $\mathcal{E}$: $\{|\psi_i\rangle|\varphi_j\rangle\}$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(A\otimes B) = \sum_{ij} \langle \psi_i \varphi_j | A \otimes B | \psi_i \varphi_j \rangle$$

$\parallel$ ← usando eigenvalores

$$\sum a_i b_j = \sum_{ij} \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \langle \varphi_j | B | \varphi_j \rangle$$

$\parallel$

$$\sum a_i \sum b_j = \left(\sum_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle\right)\left(\sum_j \langle \varphi_j | B | \varphi_j \rangle\right)$$

$$= (\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}_1} A)(\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}_2} B)$$

- Conjuntos Completos de observables que conmutan. (CCOC)

- Si $\{A\}$ es un CCOC en $\mathcal{E}_1$
  $\{B, C\}$ es un CCOC en $\mathcal{E}_2$

$\Rightarrow \{A \otimes \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_1 \otimes B, \mathbb{1} \otimes C\}$ es CCOC en $\mathcal{E}$

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

$|\psi_n\rangle \in \mathcal{E}_1$

N_1 valores distintos a_n

$$B|\varphi_{pq}\rangle = b_p|\varphi_{pq}\rangle$$

$$C|\varphi_{pq}\rangle = c_q|\varphi_{pq}\rangle$$

$|\varphi_{pq}\rangle \in \mathcal{E}_2$

Hay N_2 posibles combinaciones (p, q)

$|\varphi_{pq}\rangle$ es el único e.V. con e.v. b_p y c_q.

$\{|\psi_n\rangle\}$ es base ortonormal de $\mathcal{E}_1$

$\{|\varphi_{pq}\rangle\}$ es base ortonormal de $\mathcal{E}_2$

Considerando $|\psi_n\rangle \otimes |\varphi_{pq}\rangle$

$$A|\psi_n\,\varphi_{pq}\rangle = a_n|\psi_n\,\varphi_{pq}\rangle$$

Ahora a_n es N_2-veces degenerado.

$\therefore \{A\}$ no es un CCOC en $\mathcal{E}$

Pero $\{A, B, C\}$ si es un CCOC en $\mathcal{E}$

$$A \otimes \mathbb{1}_2 |\psi_n \ \varphi_{pq}\rangle = a_n |\psi_n \ \varphi_{pq}\rangle$$

$$\mathbb{1}_1 \otimes B |\psi_n \ \varphi_{pq}\rangle = b_p |\psi_n \ \varphi_{pq}\rangle$$

$$\mathbb{1}_1 \otimes C |\psi_n \ \varphi_{pq}\rangle = c_q |\psi_n \ \varphi_{pq}\rangle$$

Sólo hay un e.V. cuyos e.v. sean a_n, b_p, c_q (i.e. los e.v. determinan por completo al e.V)

$\therefore \{A, B, C\}$ son un C.C.O.C en $\mathcal{E}$

En general, al unir C.C.O.C en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ respectivamente obtenemos un CCOC en $\mathcal{E}$.

- Aplicaciones de producto tensorial
  - Espacios de una y más dimensiones
    - Hemos hablado $\mathcal{E}_x$

      $|x\rangle \in \mathcal{E}_x \qquad \hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$

    - También $\mathcal{E}_{\vec{r}} \qquad \vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$

¿Cómo se relacionan $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_{\vec{r}}$?

$\vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$ equivale a

$$X|x,y,z\rangle = x|x,y,z\rangle$$
$$Y|x,y,z\rangle = y|x,y,z\rangle$$
$$Z|x,y,z\rangle = z|x,y,z\rangle$$

$\vec{R} = (X, Y, Z)$ $\quad \vec{r} = (x, y, z)$

$$\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$$

$\{X\}$ es un C.C.O.C en $\mathcal{E}_x$

Para formar un C.C.O.C. en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$

$\{X, Y, Z\}$, $\{X, P_y, Z\}$

$X : \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_y$ $\quad P_y : \mathcal{E}_y \to \mathcal{E}_y$

- Sistemas de varias partículas:
  - Dos partículas sin espín:

Generalizar función de onda

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

posición partícula 1

posición partícula 2.

$$dP(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 d^3r_1 d^3r_2$$

Es la prob de encontrar a la partícula 1 en un volumen d^3r_1 situado en $\vec{r}_1$ Y a la partícula 2 en un volumen d^3r_2 situado en $\vec{r}_2$.

El espacio de estados

$$\mathcal{E}_{\vec{r}_1, \vec{r}_2} = \mathcal{E}_{\vec{r}_1} \otimes \mathcal{E}_{\vec{r}_2}$$

$\rightarrow$ No siempre $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

$\rightarrow$ Cuando sí ocurre $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ (factorizable).

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1\, \vec{r}_2 | \psi \rangle = \langle \vec{r}_1 | \psi_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | \psi_2 \rangle$$
$$= \psi_1(\vec{r})\, \psi_2(\vec{r}_2)$$

Decimos que no hay correlación entre los sistemas.

— Dos espines ($s = \frac{1}{2}$; $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)

base sistema 1: $\{ |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \}$

base sistema 2: $\{ |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \}$

Base de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ $\{ |\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle \}$

Partícula 1   Partícula 2

$|\uparrow\rangle_{(1)} \otimes |\downarrow\rangle_{(2)}$ no hay ambigüedad $\Rightarrow$ el orden no importa

$$|\uparrow\rangle_{(1)} \otimes |\downarrow\rangle_{(2)} = |\downarrow\rangle_{(2)} \otimes |\uparrow\rangle_{(1)}$$

$$H = c\,\overbrace{(\vec{S}_1 \cdot \vec{B} + \vec{S}_2 \cdot \vec{B})}^{\text{campo mag.}} + d\, \underbrace{\overbrace{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}^{\text{interacción}}}_{\mathcal{E}}$$

$\vec{S}_1 \to \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1}_2$, $\vec{S}_2 \to \mathbb{1} \otimes \vec{S}_2$

$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}$