Momento angular III

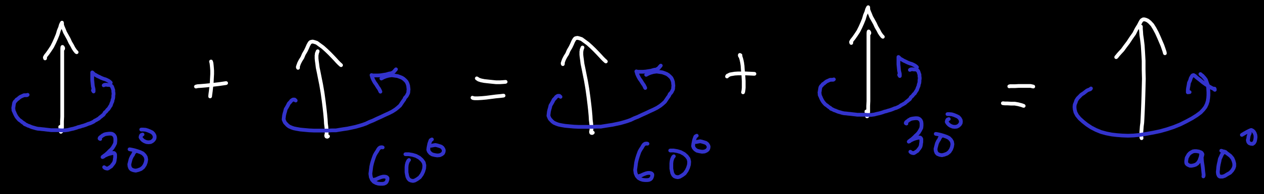
Lo que hicimos antes para obtener $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \longrightarrow [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

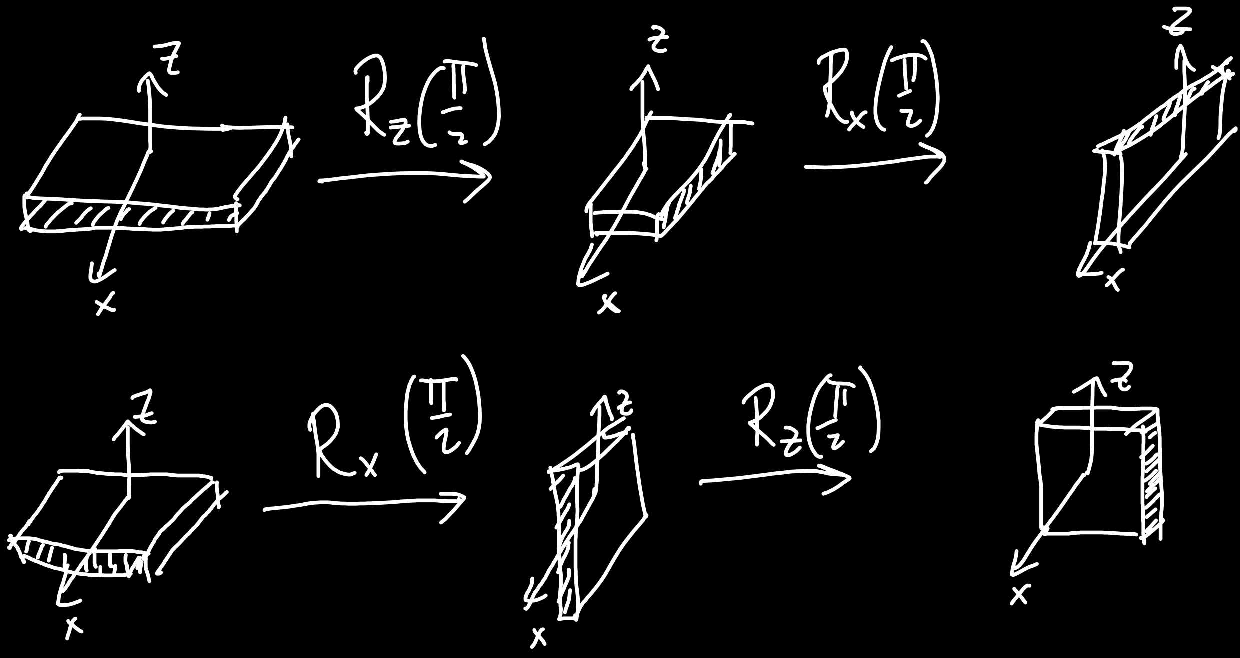
$$\Big\downarrow \text{generalizamos}$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

- Rotaciones y reglas de conmutación de momento angular.
- Rotaciones respecto al mismo eje conmutan.



- Rotaciones respecto a distintos ejes NO conmutan.

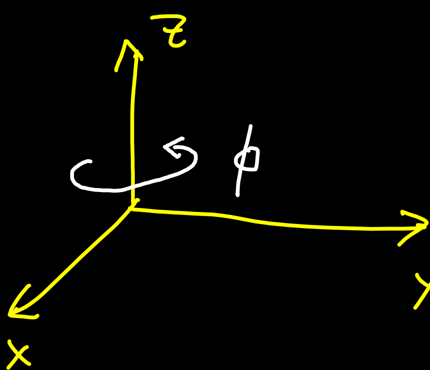


- Describamos cuantitativamente

$$\vec{v}\,' = \underset{\text{matriz de rotación}}{R}\,\vec{v}$$

$$R R^T = R^T R = \mathbb{1} \quad \text{(preserva norma)}$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



El objeto rota y el sistema de coordenadas esta fijo

Para rotaciones infinitesimales $\varepsilon = d\phi$

$$R_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix} \quad R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix}$$

¿Qué ocurre con rotaciones infinitesimales sucesivas?

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

El conmutador $[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)]$

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \underbrace{R_z(\varepsilon^2) - \mathbb{I}}$$

Rotaciones infinitesimales en mecánica cuántica.

$R \rightarrow$ determinan una rotación

$$|\alpha\rangle_{\text{Rotado}} = \underbrace{\mathcal{D}(R)}_{\substack{\text{operador} \\ \text{de rotación}}}|\alpha\rangle$$

R actúa sobre vectores en $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{D}(R)$ actúa sobre vectores de estado en el espacio de Hilbert.

¿Qué forma tiene $\mathcal{D}(R)$?

- Fijémonos en operadores similares (operadores de traslación)

- Traslación temporal.

$$|\psi(t+t_0)\rangle = \underbrace{U(t)}_{\text{operador de traslación temporal}}|\psi(t_0)\rangle$$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

H es el generador de traslaciones temporales

Para tiempos infinitesimales

$$U(t) \approx \mathbb{1} - \frac{iHt}{\hbar}$$

Observación:

Base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

$$H = \hbar\Omega\,(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|) = \Omega h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U(dt)|a\rangle = \left[\mathbb{1} - i\Omega dt(\cancel{|a\rangle\langle b|} + |b\rangle\langle a|)\right]|a\rangle$$

$$= |a\rangle - i\Omega dt\,|b\rangle$$

Operador de traslación espacial.

$$\underbrace{X}_{\text{operador}}\ \underbrace{|\overset{\text{etiqueta del vector}}{x}\rangle}_{\text{vector}} = \underset{\substack{\text{escalar}\\ \text{eigenvalor}}}{x}\ \overbrace{|x\rangle}^{\text{vector}}$$

en 3D

$$\underset{(X,Y,Z)}{\vec{R}}\,|\vec{r}\rangle = \underset{(x,y,z)}{\vec{r}}\,|\vec{r}\rangle$$

$$T(x_0)|x\rangle = |x+x_0\rangle$$

$$T(x) = e^{-i\overset{\text{escalar}}{x}\overset{\text{op}}{P}/\hbar} \qquad \left(\text{En 3D} \quad T(\vec{r}) = e^{-i\vec{r}\cdot\vec{P}/\hbar} \right)$$

$$\underbrace{\langle x|T(x_0)|\psi\rangle}_{T(x_0)\psi(x)} = \langle x|\, e^{-ix_0P/\hbar}\,|\psi\rangle$$

$$= \langle x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix_0 P/\hbar)^n}{n!} |\psi\rangle$$

$$\langle x|P|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x_0\partial_x)^n}{n!}\langle x|\psi\rangle$$

$$= \left[1 - x_0\partial_x + \frac{(x_0\partial_x)^2}{2!} - \dots\right]\psi(x)$$

Por Taylor.

$$= \psi(x - x_0)$$

Ojo:

$$e^{-\vec{r}\cdot\vec{\nabla}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{r}\cdot\nabla f(\vec{x}) + \frac{1}{2!}(\vec{r}\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}) + \cdots = f(\vec{x}-\vec{r})$$

Debe cumplir

$$T(x_1)\,T(x_2) = T(x_1+x_2)$$

$$e^{-ix_1P/\hbar}\, e^{-ix_2P/\hbar} = e^{-i(x_1+x_2)P/\hbar}$$

Traslaciones infinitesimales

$$T(\varepsilon) = \mathbb{1} - \frac{i\varepsilon P}{\hbar}$$

Para rotaciones infinitesimales

operador de rotación

$$\mathcal{D}_{\hat{n}}(d\phi) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{1} - i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi$$

$\vec{J}$ operador de momento angular

$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$

$$\mathcal{D}_z(d\phi) = \mathbb{1} - \frac{iJ_z}{\hbar}d\phi$$

Ésta es una definición alternativa de momento angular como generador de rotaciones.

Para rotaciones no infinitesimales ángulo ϕ y n grande

$$\mathcal{D}_z(\phi) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_z\left(\frac{\phi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{iJ_z}{\hbar}\frac{\phi}{n}\right)^n$$

Usando la definición para rotaciones infinitesimales.

$$= e^{-iJ_z\phi/\hbar} = \mathbb{1} - \frac{iJ_z\phi}{\hbar} - \frac{J_z^2\phi^2}{2\hbar^2} + \dots$$

En general $\mathcal{D}_{\hat{n}}(\phi) = e^{-i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\phi}$

$\mathcal{D}$ debe cumplir las propiedades de cualquier rotación R

Identidad $R\cdot\mathbb{1} = R \Rightarrow \mathcal{D}(R)\cdot\mathbb{1} = \mathcal{D}(R)$

Cerradura: $R_1R_2 = R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2) = \mathcal{D}(R_3)$

Inversa $RR^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{D}(R)\mathcal{D}^{-1}(R) = \mathbb{1}$

Asociatividad: ... ..

En particular:

El conmutador $[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)]$

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \underbrace{R_z(\varepsilon^2) - \mathbb{1}}$$

Para $\mathcal{D}(R)$ esto se ve como

$$\left(\mathbb{1} - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{\hbar^2}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{\hbar^2}\right) - \left(\mathbb{1} - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{\hbar^2}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{\hbar^2}\right) = \left(\cancel{\mathbb{1}} - \frac{iJ_z\varepsilon^2}{\hbar}\right) - \cancel{\mathbb{1}}$$

Los términos $\mathbb{1}$ y de orden ε se cancelan automáticamente.

Los términos de orden ε^2:

$$-\cancel{\frac{J_y^2}{\hbar^2}} - \frac{J_xJ_y}{\cancel{\hbar^2}} - \cancel{\frac{J_x^2}{\hbar^2}} + \cancel{\frac{J_x^2}{\hbar^2}} + \frac{J_yJ_x}{\cancel{\hbar^2}} + \cancel{\frac{J_y^2}{\hbar^2}} = -\frac{iJ_z\hbar}{\cancel{\hbar}}$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

Relación de conmutación fundamental de momento angular.

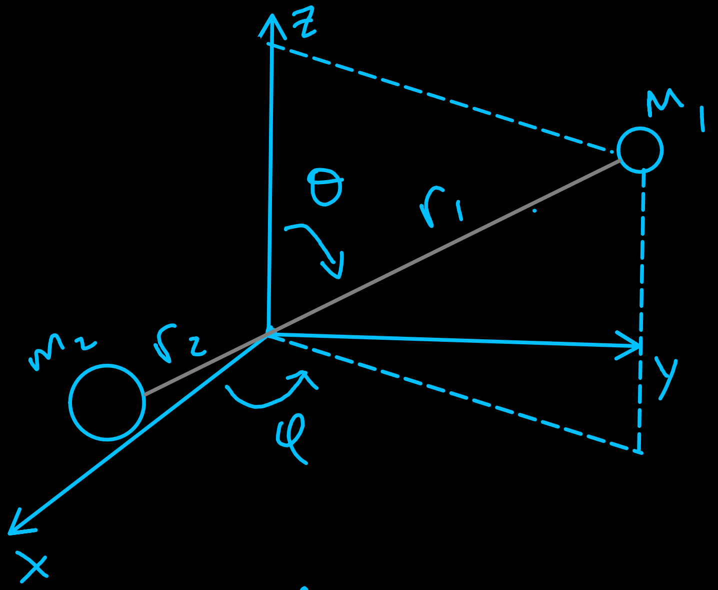
Para obtenerla usamos:

1.- J_k es el generador de rotaciones respecto al eje k.

2.- Rotaciones respecto a distintos ejes no conmutan

Ejemplo de aplicación: rotor rígido

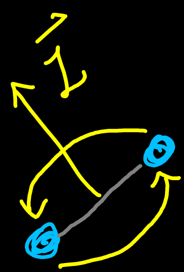
Tratamiento clásico:



Origen: centro de masa

$$r_1 + r_2 = r_e$$

Para traducirlo a un problema de un solo cuerpo



$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

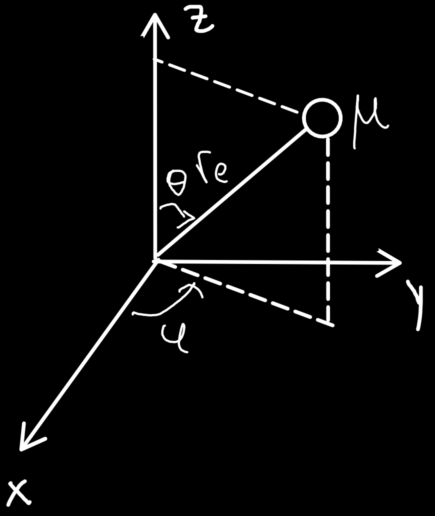
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m r_e^2$$

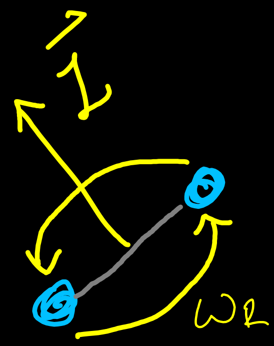
- Si no hay $\vec{F}$ externas, m.a. $\vec{L}$ respecto al c.m. es constante.

- El rotor gira con frecuencia angular ω_R constante en el plano perpendicular a $\vec{L}$.

$$\rightarrow |\vec{L}| = r_1 m_1 r_1 \omega_R + r_2 m_2 r_2 \omega_R = I\omega_R = \mu r_e^2 \omega_R$$

$$\rightarrow H = \frac{1}{2} I \omega_R^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{L^2}{2\mu r_e^2}$$





Mecánica Cuántica

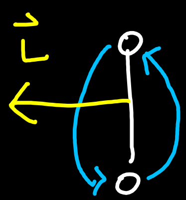
$$H = \frac{L^2}{2\mu r_e^2}$$

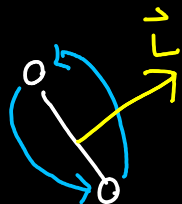
Encontrar los e.V. y e.v. H se reduce a encontrar los de L^2.

$$\Rightarrow \qquad H|l,m\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r_e^2}|l,m\rangle$$

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r_e^2}$$

Hay degeneración en m porque





la energía no depende de la orientación

Definiendo $B = \frac{\hbar}{4\pi \mu r_e}$ $\quad [B] = 1/T$

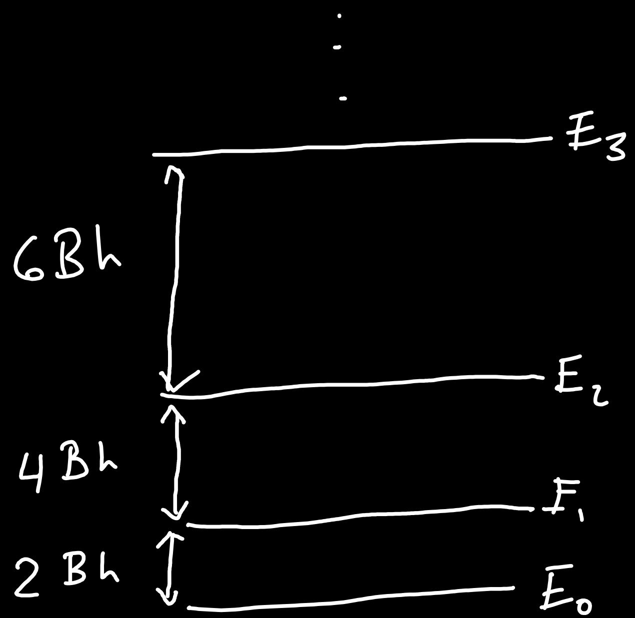
$E_\ell = \hbar B \, \ell(\ell+1)$

$E_0 = 0$

$E_1 = 2\hbar B$

$E_2 = 6\hbar B$

$E_3 = 12\hbar B$



Los e.V. son degenerados:

- El e.V. $|\ell, m\rangle$ tiene una degeneración de $(2\ell+1)$ veces.

- Los observables X, Y, Z.

La función de onda $\psi(\theta, \varphi)$

$|\psi(\theta,\varphi)|^2 d\Omega$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en el ángulo sólido $d\Omega$

$\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Recordando

$$x = r_e \sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r_e \sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r_e \cos\theta$$

$$X|\psi\rangle \longleftrightarrow r_e \sin\theta\cos\varphi\, \psi(\theta,\varphi)$$

$$Y|\psi\rangle \longleftrightarrow r_e \sin\theta\sin\varphi\, \psi(\theta,\varphi)$$

$$Z|\psi\rangle \longleftrightarrow r_e \cos\theta\, \psi(\theta,\varphi)$$

$$\langle \underset{\substack{\uparrow \\ Y_{l'}^{*m'}(\theta,\varphi)}}{l',m'} | Z | \underset{\substack{\uparrow \\ Y_l^m(\theta,\varphi)}}{l,m} \rangle = \int Y_{l'}^{*m'}(\theta,\varphi)\, \underset{\substack{\uparrow \\ Z = r_e\cos\theta}}{Z}\, Y_l^m(\theta,\varphi)\, d\Omega$$

$$\cos\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\, Y_{l-1}^m(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\, Y_{l+1}^m(\theta,\varphi)$$

$$\langle l',m'|z|l,m\rangle = r_e \delta_{m'm}\left[\delta_{l',l-1}\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}} + \delta_{l',l+1}\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\right]$$

$$\langle l,m|Z|l,m\rangle = 0$$

Un estado general $|\psi\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{l,m}(0)|l,m\rangle$

Para obtener dependencia temporal de $\langle x\rangle, \langle Y\rangle, \langle z\rangle$ es necesario preparar combinaciones lineales de $|l,m\rangle$.