Momento angular:

En mecánica clásica:

- En un sistema aislado $\vec{\mathcal{L}}_{total} = cte.$
- Para partícula potencial central $V(|\vec{r}|)$ $\vec{\mathcal{L}}$ cte.
- Conservación de momento angular es resultado de simetría rotacional.

En meánica cuántica:

$\vec{\mathcal{L}} \xrightarrow{\text{observable}} \vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$

→ Cuando $\vec{L}$ es cte. mov. $[H, L_i] = 0$
$\exists$ una base de e.V. comunes a H y L_i.

→ Si un momento angular tiene analogía clásica es "momento angular orbital"
$\vec{L}$

→ Si es un espín, sin análogo clásico
$\vec{S}$

→ En general $\vec{J}$ un m.a. de origen arbitrario.

Reglas de conmutación para $\vec{L}$.

recordatorio
$$\boxed{\begin{aligned}[R_i,R_j]&=0\\ [P_i,P_j]&=0\\ [R_i,P_j]&=i\hbar\delta_{ij}\end{aligned}}$$

$$\vec{L}=(L_x,L_y,L_z)$$

$$\vec{L}=\vec{R}\times\vec{P}\Rightarrow L_x=YP_z-ZP_y$$

$$[L_x,L_y]=[YP_z-ZP_y,ZP_x-XP_z]$$
$$=\underbrace{[YP_z,ZP_x]}_{Z\text{ y }P_z\text{ no conmutan}}-\cancel{[YP_z,XP_z]}-\cancel{[ZP_y,ZP_x]}+\underbrace{[ZP_y,XP_z]}_{Z\text{ y }P_z\text{ no conmutan}}$$

$$=YP_x[P_z,Z]+P_yX[Z,P_z]$$
$$=-i\hbar YP_x+i\hbar P_yX=i\hbar L_z$$

-Análogamente

$$\boxed{\begin{aligned}[L_x,L_y]&=i\hbar L_z\\ [L_z,L_x]&=i\hbar L_y\\ [L_y,L_z]&=i\hbar L_x\end{aligned}}$$

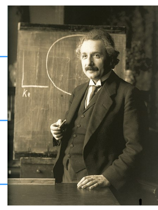
$\therefore$ No podemos medir L_x, L_y y L_z simultáneamente. ¡!

-Usando el tensor de Levi-Civita

(i,j,k)

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (1,2,3),(2,3,1), \text{ or } (3,1,2),\\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (3,2,1),(1,3,2), \text{ or } (2,1,3),\\ 0 & \text{if } i=j, \text{ or } j=k, \text{ or } k=i\end{cases}$$

$\vec{A}$ y $\vec{B}$ $\qquad (\vec{A}\times\vec{B})_k=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_j=\epsilon_{ijk}A_iB_j$

Notación de 

Las relaciones de conmutación quedan

$$[L_i,L_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

En M.C. definimos a un momento angular $\vec{J}$ por medio de las reglas de conmutación

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$
$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y$$
$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x \qquad J = (J_x, J_y, J_z)$$

Tambien definimos $\boxed{J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2} = \vec{J}\cdot\vec{J}$

Veamos que $[J^2, J_i] = 0 \qquad i = x, y, z$

$$[J^2, J_x] = [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_x] = \cancel{[J_x^2, J_x]} + [J_y^2, J_x] + [J_z^2, J_x]$$

$$[J_y^2, J_x] = J_y[J_y, J_x] + [J_y, J_x]J_y = -i\hbar J_y J_z - i\hbar J_z J_y$$

$$[J_z^2, J_x] = i\hbar J_z J_y + i\hbar J_y J_z$$

$$\therefore [J^2, J_x] = 0$$

Análogamente $[J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$

$\therefore$ Podemos medir J^2 y UNA componente simultáneamente.

Al eje que elegimos para describir al sistema se le llama eje de cuantización.

Se suele poner el eje de cuantización a lo largo de z.

Buscaremos e.V. comunes a J^2, J_z

$J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$

Teoría de momento angular.

- Definiremos J_+ y J_-

$$J_+ = J_x + iJ_y \qquad J_- = J_x - iJ_y$$

Obs: No son hermitianos, $J_+^\dagger = J_-$; $J_-^\dagger = J_+$

Reglas de conmutación para J_+ y J_-:

$$[J_z, J_+] = [J_z, J_x + iJ_y] = [J_z, J_x] + i[J_z, J_y]$$
$$= i\hbar J_y + \hbar J_x = \hbar J_+$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0$$

$$J_+J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - iJ_xJ_y + iJ_yJ_x$$
$$= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$$

Eigenvalores de J^2 y J_z

Veamos $\langle J^2 \rangle \geq 0$

el que sea

$$\langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle$$

$$\| J_x |\psi\rangle \|^2 + \| J_y |\psi\rangle \|^2 + \| J_z |\psi\rangle \|^2 \geq 0$$

Si $|\varphi\rangle$ es e.V. J^2 con e.v. λ

$$0 \leq \langle \varphi | J^2 | \varphi \rangle = \lambda \langle \varphi | \varphi \rangle = \lambda \| |\varphi\rangle \|^2$$

$\therefore \lambda \geq 0$ los e.v. de J^2 deben ser positivos.

$$\lambda = \hbar^2 j(j+1) \quad (j \text{ adimensional})$$

Escribiremos los e.v. de J_z como $\hbar m$

adimensional!

Etiquetaremos los e.V. con j y m.

Nota: J_z y J^2 no son un conjunto completo de observables que conmutan.

Escribiremos los e.V. $|k, j, m\rangle$

contiene todos los demás índices no relacionados con momento angular.

Las ecuaciones de e.v. son

$$\boxed{\begin{aligned} J^2 |k,j,m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |k,j,m\rangle \\ J_z |k,j,m\rangle &= \hbar m |k,j,m\rangle \end{aligned}}$$

Si $m\hbar$ y $\hbar j(j+1)$ son los e.v. J_z y J^2 asoc. al mismo e.V. $|k,j,m\rangle$

Lema I: $-j \leq m \leq j$

$$0 \leq \| J_+ |k,j,m\rangle \|^2 = \langle k,j,m | J_- J_+ | k,j,m\rangle \qquad (1)$$
$$= \langle k,j,m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z | k,j,m\rangle$$
$$= \langle k,j,m | \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m | k,j,m\rangle$$
$$= \hbar j(j+1) \underbrace{-\hbar^2 m^2 - \hbar^2 m}_{-\hbar^2 m(m+1)}$$

$$0 \leq \| J_- |k,j,m\rangle \|^2 = j(j+1)\hbar^2 \underbrace{- m^2 \hbar^2 + m\hbar^2}_{-m(m-1)\hbar^2} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} j(j+1) - m(m-1) \geq 0 \\ j(j+1) - m(m+1) \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (j+m)(j-m+1) \geq 0 \\ (j-m)(j+m+1) \geq 0 \end{array}$$

$$-(j+1) \leq m \leq j$$
$$-j \leq m \leq j+1$$

Para que se cumplan ambas

$$-j \leq m \leq j$$

Para osc. arm.

$a|\varphi_0\rangle = 0$

$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$

Lema II:

i) $m = -j \iff J_-|k,j,m\rangle = 0$

ii) Si $m > -j$ entonces $J_-|k,j,m\rangle \neq 0$ y es e V de J^2 y J_z con e.v. $\hbar j(j+1)$ y $(m-1)\hbar$

Dem:

$i \Rightarrow)$ Usando (2) con $m=-j$

$$\| J_- |k,j,-j\rangle \|^2 = 0$$

$i \Leftarrow)$ $J_-|k,j,m\rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{J_+ J_-}_{J^2 - J_z^2 + \hbar J_z} |k,j,m\rangle = 0$

$\left(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z\right)|k,j,m\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad j(j+1) - m^2 + m = 0$

$\left(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m\right)\underbrace{|k,j,m\rangle}_{\neq 0} = 0$

$(j+m)(j-m+1) = 0$

$j+m=0$ $\qquad$ $\cancel{j-m+1=0}$

$\boxed{m=-j}$ $\qquad$ $\cancel{-m=-j-1}$

Lema I: $-j \leq m \leq j$

ii) Si $m > -j$

$$\| J_-|k,j,m\rangle \|^2 > 0 \Rightarrow J_-|k,j,m\rangle \neq 0$$

Veamos que $J_-|k,j,m\rangle$ es eV de J^2 y J_z

J^2: $\quad [J^2, J_-] = [J^2, J_x + iJ_y] = 0$

$$[J^2, J_-]|k,j,m\rangle = 0$$

$$J^2 \underbrace{J_-|k,j,m\rangle} = J_- \underbrace{J^2|k,j,m\rangle} = \hbar^2 j(j+1) \underbrace{J_-|k,j,m\rangle}$$

J_z: Recordamos $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$

$$[J_z, J_-]|k,j,m\rangle = -\hbar J_-|k,j,m\rangle$$

$$\begin{aligned} J_z \underbrace{J_-|k,j,m\rangle} &= J_-J_z|k,j,m\rangle - \hbar J_-|k,j,m\rangle \\ &= \hbar m J_-|k,j,m\rangle - \hbar J_-|k,j,m\rangle \\ &= \hbar(m-1)\underbrace{J_-|k,j,m\rangle} \end{aligned}$$

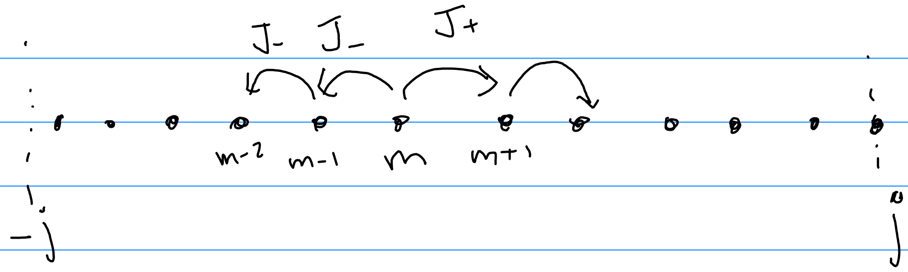
Lema III:

i) $m=j \iff J_+|k,j,m\rangle = 0$

ii) Si $m<j$, $J_+|k,j,m\rangle$ es eV de J^2 y J_z

con e.v. $j(j+1)\hbar^2$ y $(m+1)\hbar$

$$\boxed{-j \leq m \leq j}$$



Para que esto sea consistente

$\exists$ un etero $p \geq 0$ tal que $m-p=-j$
$\exists$ " " $q \geq 0$ tal que $m+q=j$

$$\Rightarrow \quad 2j = p+q$$

$\therefore$ $2j$ es entero positivo

$j = 0, 1, 2, \ldots$ Bosones

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ Fermiones

Para j dado, los valores posibles de m son

$$m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j+1$$