# Física Atómica y Materia Condensada

**Semestre 2019-1**

**Prof: Asaf Paris Mandoki**

**Tarea 2**
**Entrega: 6 septiembre 2018**

**Ejercicio 1** : Momento angular orbital **10 Puntos**

Mostrar que las componentes del operador de momento angular orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (-i\hbar\nabla)$ son

$$
\begin{aligned}
L_x &= i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
L_y &= i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

y que satisface las relaciones de conmutación de operadores de momento angular.

**Ejercicio 2** : Operadores de escalera orbitales **10 Puntos**

Mostrar que los operadores de ascenso y descenso de momento angular orbital pueden escribirse como

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

**Ejercicio 3** : Aproximación de Bohr **20 Puntos**

Durante la clase usamos el argumento de Bohr para estimar la velocidad del electrón en el orbital más bajo. En este ejercicio compararemos el tamaño del orbital más bajo obtenido con la teoría de Bohr y el obtenido con la teoría de Schrödinger.

a. Calcule el tamaño del orbital más bajo usando la teoría de Bohr. Es decir, encuentre el valor del radio de Bohr.

b. Calcule el valor esperado de la coordenada radial usando la función de onda de menor energía obtenida con la ecuación de Schrödinger.

c. Calcule el valor más probable (el máximo de la probabilidad) de la coordenada radial correspondiente a la función de onda de menor energía obtenida con la ecuación de Schrödinger.
Nota: recuerde que la probabilidad de que el electrón tenga las coordenadas $r, \theta, \varphi$ está dada por $p(r, \theta, \varphi) = |\psi(r, \theta, \varphi)|^2\, dV$

**Ejercicio 4** : Orden de magnitud de correcciones **30 Puntos**

En clase vimos que la corrección a la energía debido al término de variación de la masa con la velocidad es del orden de $\alpha^2$. En esta pregunta calcularemos el orden de magnitud de las correcciones debido a la interacción espín-órbita y al término de Darwin.

a. La interacción espín órbita obtenida en clase tiene la forma

$$H_{SO} = \frac{1}{2m_e^2c^2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}.$$

Compare este término con la interacción de Coulomb $-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$ suponiendo que $L$ y $S$ son de orden $\hbar$ cada uno y la distancia es del orden del radio de Bohr. Escriba el resultado en términos de la constante de estructura fina.

b. El término de Darwin obtenido en clase tiene la forma

$$H_D = \frac{\pi\hbar^2}{2m_e^2c^2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\delta(r).$$

Este término sólo modifica la energía de estados con $l = 0$ que son los que satisfacen $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$. Para estimar el orden de magnitud de este término considere que $|\psi(\mathbf{0})|^2 \approx 1/a_0^3$. ¿Por qué tiene sentido esta aproximación?

Compare esto con el orden de magnitud del Hamiltoniano no relativista $H_0 \approx m_e c^2\alpha^2$ y escriba el resultado en términos de $\alpha$.

**Ejercicio 5** : Interacción espín órbita **30 Puntos**

Encuentre la representación matricial del operador $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ en las bases $|l, m_l, s, m_s\rangle$ y $|l, s, j, m_j\rangle$ para $s = 1/2$ y $l = 1$.

a. Recuerde el método que usamos en clase para reescribir $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ para poderlo aplicar a un elemento de la base $|lsjm_j\rangle$.

b. Para calcular los elementos de la matriz de $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ en la base $|l, m_l, s, m_s\rangle$ pruebe la siguiente identidad

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}(L_+S_- + L_-S_+) + L_zS_z.$$

**Nota:** Ponga atención a la estructura de los elementos de matriz antes de calcular todas las entradas y note que muchos son cero.