Mecánica Cuántica

Semestre 2025-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Edgar Giovanni Alonso Torres

Ayud: Alberto Hernández López

Tarea 2
Entrega: 05 marzo 2025

Ejercicio 1: Postulados de la Mecánica Cuántica **10 pts**

Tomando en cuenta el cuarto postulado para el caso de un espectro discreto que puede ser degenerado, muestra que la suma de las probabilidades de obtener todos los resultados es 1. ¿Qué significa este resultado?

Ejercicio 2: Observables que conmutan **10 pts**

Considera un sistema físico cuyo espacio de estados es generado por los vectores base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Usando esta base definimos a los operadores

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(-|u_1\rangle\langle u_1| - |u_2\rangle\langle u_2|) \qquad \hat{B} = \hbar b(|u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1|),$$

donde $\hbar$, ω_0 y b son constantes reales.

a. ¿Son $\hat{H}$ y $\hat{B}$ Hermitianos? Muéstralo.

b. Muestra que $\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan.

c. Encuentra un conjunto de eigenvectores comunes a $\hat{H}$ y $\hat{B}$.

Ejercicio 3: El conmutador de $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$ **10 pts**

Calcula el conmutador entre $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$. Puedes usar que $\langle \mathbf{r}|\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\langle \mathbf{r}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r})$ o que $\langle \mathbf{p}|\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = \mathbf{p}\langle \mathbf{p}|\psi\rangle = \mathbf{p}\psi(\mathbf{p})$.

Ejercicio 4: El conmutador de $[\hat{P}, V(\hat{X})]$ **10 pts**

En este ejercicio mostrarás que $[\hat{P}, V(\hat{X})] = -i\hbar V'(\hat{X})$.

a. Usando que $\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar$ muestra que $\left[\hat{P}, \hat{X}^n\right] = -i\hbar n\hat{X}^{n-1}$.
(Usa inducción matemática.)

b. Usa el inciso anterior para mostrar que $[\hat{P}, V(\hat{X})] = -i\hbar V'(\hat{X})$
(*Sugerencia:* Escribe $V(x)$ usando su expansión en serie.)

Ejercicio 5: Operadores de posición y momento **10 pts**

Calcula el conmutador $\left[\hat{X}^2, \hat{P}^2\right]$ en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$. Es decir, déjalo en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$ sin exponente.

Ejercicio 6: Representación de posición y momento **10 pts**

En clase mostramos que $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. En este inciso mostrarás una relación análoga para la representación $\{|p\rangle\}$. Muestra que

a. Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ la función de onda en el espacio de momento, el efecto de aplicar el operador $\hat{X}$ es:

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p)$$

b. Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ y $\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$ funciones de onda en el espacio de momento, los elementos de matriz del operador $\hat{X}$ están dados por:

$$\langle\varphi|X|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p\, \varphi^*(p) i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p),$$

Ejercicio 7: Valor esperado y desviación RMS **10 pts**

En este ejercicio revisarás y aplicarás las definiciones de valor esperado y de desviación RMS. Considera las funciones de onda adimensionales

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2} \qquad \text{y} \qquad \psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2\alpha}\, x e^{-\alpha x^2/2},$$

con α una constante positiva.

a. Calcula $\left\langle \hat{X} \right\rangle$ para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$.

b. Calcula ΔX para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$.

c. Realiza un dibujo donde muestres $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $|\psi_0(x)|^2$, $|\psi_1(x)|^2$ y las cantidadas calculadas en los incisos anteriores.

Ejercicio 8: Relación de incertidumbre generalizada **20 pts**

En este ejercicio demostrarás la relación de incertidumbre generalizada para dos operadores hermitianos $\hat{A}$ y $\hat{B}$,

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle\right)^2,$$

donde $\Delta A^2 = \left\langle \left(\hat{A} - \left\langle \hat{A} \right\rangle\right)^2 \right\rangle$ y $\Delta B^2 = \left\langle \left(\hat{B} - \left\langle \hat{B} \right\rangle\right)^2 \right\rangle$.

a. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 \leq \langle\phi_1|\phi_1\rangle \langle\phi_2|\phi_2\rangle$

   I. Definiendo $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + \lambda\, |\phi_2\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, encuentra la desigualdad resultante de $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$.

   II. La desigualdad obtenida es válida para toda λ. En particular para $\lambda = -\langle\phi_2|\phi_1\rangle / \langle\phi_2|\phi_2\rangle$. Usa esto para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

b. Usando esta desigualdad para $|f\rangle = \left(\hat{A} - \left\langle \hat{A} \right\rangle\right)|\psi\rangle$ y $|g\rangle = \left(\hat{B} - \left\langle \hat{B} \right\rangle\right)|\psi\rangle$ obtén que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2.$$

c. Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2$.

d. Muestra que $\langle f|g\rangle = \left\langle \hat{A}\hat{B}\right\rangle - \left\langle \hat{A}\right\rangle \left\langle \hat{B}\right\rangle$ y $\langle g|f\rangle = \left\langle \hat{B}\hat{A}\right\rangle - \left\langle \hat{B}\right\rangle \left\langle \hat{A}\right\rangle$.

e. Concluye que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle\right)^2.$$

f. ¿Qué forma toma la relación de incertidumbre para $\hat{A} = \hat{X}$ y $\hat{B} = \hat{P}$?

Nota: el conmutador de dos operadores Hermitianos tiene un factor de i por lo que la cantidad dentro de el paréntesis es real y por tanto su cuadrado es positivo.

Ejercicio 9: Densidad de corriente de probabilidad **20 pts**

En este ejercicio profundizarás en el concepto de densidad de corriente de probabilidad de una función de onda $\psi(\mathbf{r})$ definido por $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi}[\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi - \psi \boldsymbol{\nabla}\psi^*]$.

a. Considera los paquetes de onda unidimensionales dados por $\psi_1(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right)$ y $\psi_2(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2} + ikx\right)$ con N, L y k constantes reales positivas.

   I Calcula $|\psi_1(x)|^2$, $|\psi_2(x)|^2$ y dibújalas en función de x.

   II Calcula la densidad de corriente de probabilidad para $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$. Agrega flechas a tu dibujo del inciso anterior indicando hacia dónde fluye la probabilidad.

b. Escribiendo a la función de onda tridimensional en su descomposición polar como $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}$, con S y ρ funciones reales. Muestra que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{m}$ usando la definición de densidad de corriente de probabilidad vista en clase.

c. Considerando los resultados de los incisos anteriores ¿Cómo se relacionan la densidad de corriente de probabilidad y la fase de una función de onda?