Recapitulación
Conjuntos Completos de Operadores que Conmutan
El proyector como observable.

$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$

Variables conjugadas

$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ salió de decir que $TF\{\psi(x)\} = \psi(p)$

- Dos observables conjugados P,Q son aquellos que $\cancel{[P,Q] = i\hbar}$
- Veremos que $\Delta P \Delta Q \geq \hbar/2$
- Considera $|\varphi\rangle = (Q + i\lambda P)|\psi\rangle$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Como la norma de $\langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0$ y como P y Q son hermíticos tenemos

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\varphi\rangle &= \langle\psi|(Q - i\lambda P)(Q + i\lambda P)|\psi\rangle \\ &= \ldots \\ &= \langle Q^2\rangle + i\lambda \langle [Q,P]\rangle + \lambda^2 \langle P^2\rangle \\ &= \langle Q^2\rangle - \lambda\hbar + \lambda^2 \langle P^2\rangle \geq 0\end{aligned}$$

para que esta desigualdad se cumpla para todo λ debe pasar que la parábola descrita por este polinomio nunca toque el eje en dos puntos, i.e. su discriminante debe ser cero para que las dos raíces sean la misma o negativo para que las raíces sean complejas.

$$\hbar^2 - 4\langle P^2\rangle \langle Q^2\rangle \leq 0$$

o bien

$$\langle P^2\rangle \langle Q^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

- Considerando $|\psi\rangle$ dado definimos

$$\begin{aligned}P' &= P - \langle P\rangle \mathbb{1} \\ Q' &= Q - \langle Q\rangle \mathbb{1}\end{aligned}$$

y vemos que $[Q', P'] = [Q, P] = i\hbar$ por lo que el resultado antes obtenido también vale para P' y Q' y por tanto

$$\langle P'^2\rangle \langle Q'^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

- Regresado a la definicón de RMS deviation que vimos $\Delta P = \sqrt{\langle P'^2\rangle}$ y $\Delta Q = \sqrt{\langle Q'^2\rangle}$ obtenemos

$$\Delta P \cdot \Delta Q \geq \hbar/2$$

- Este argumento puede generalizarse (tarea) para dos observables arbitrarios A y B obteniendo

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle [A,B]\rangle|$$

7. Interferencia y Desviación RMS

7.1. El principio de superposición: efectos de interferencia

CT III.E

- El primer postulado dice que los estados de un sistema se pueden construir a partir de superposiciones.
- Al combinarlo con los otros postulados obtenemos efectos de interferencia.

Diferencia entre superposiciones y mezclas estadísticas

- Considerando dos estados ortonormales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ ~~eigenestados de B con eigenvalores b_1 y b_2~~ (esto no importa)
- Si consideramos otro observable A con e.V. $|u_n\rangle$. La probabilidad $\mathcal{P}_1(a_n)$ de obtener el resultado a_n cuando el sistema esta en el estado $|\psi_1\rangle$ es

$$|\psi_i\rangle = \sum_n \langle u_n|\psi_i\rangle |u_n\rangle$$

$$\mathcal{P}_1(a_n) = |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2$$
$$\mathcal{P}_2(a_n) = |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2$$

- Ahora, pensando en un estado normalizado formado por una superposición lineal

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle$$
$$1 = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2$$

- Decimos que si el sistema está en el estado $|\psi\rangle$ entonces hay una probabilidad $|\lambda_1|^2$ de encontrarlo en el estado $|\psi_1\rangle$ y $|\lambda_2|^2$ de encontrarlo en $|\psi_2\rangle$.
- Esto nos puede llevar a pensar (equivocadamente) que un estado como $|\psi\rangle$ es una mezcla estadística. i.e. Si tenemos N copias del sistema, podríamos pensar que es equivalente que todas las copias estén en el estado $|\psi\rangle$ es equivalente a que $|\lambda_1|^2 N$ copias estén en el estado $|\psi_1\rangle$ y $|\lambda_2|^2 N$ copias estén en el estado $|\psi_2\rangle$.
- Esta afirmación es errónea y nos lleva a concluir cosas equivocadas.
- Si el estado fuera efectivamente una mezcla estadística esto nos llevaría a concluir que

$$\mathcal{P}(a_n) = |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n)$$

- Por otro lado, de acuerdo al postulado de medición

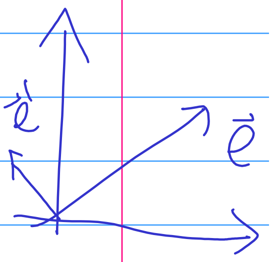
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(a_n) &= |\langle u_n|\psi\rangle|^2 \\
&= |\lambda_1 \langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2 \langle u_n|\psi_2\rangle|^2 \\
&= |\lambda_1|^2 |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 \\
&+ 2\,\mathrm{Re}\{\lambda_1\lambda_2^* \langle u_n|\psi_1\rangle \langle u_n|\psi_2\rangle^*\} \\
&= |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) + 2\,\mathrm{Re}\{\lambda_1\lambda_2^* \langle u_n|\psi_1\rangle \langle u_n|\psi_2\rangle^*\}
\end{aligned}$$

las amplitudes de probabilidad interfieren.

- Considerar al estado como mezcla estadística ignora los efectos de interferencia
- Vemos que las fases relativas entre λ_1 y λ_2 se vuelven importantes pues aparecen explícitamente en $\lambda_1\lambda_2^*$.

Ejemplo: Polarización de la luz

- Considerar el estado de polarización $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$



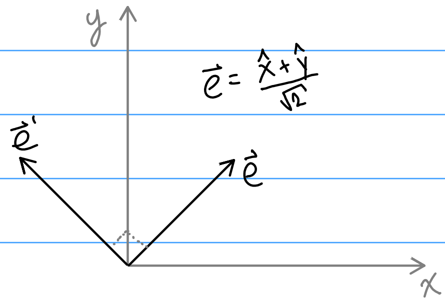
- Si consideráramos este estado como una mezcla estadística de $N/2$ fotones en el estado $\mathbf{e}_x$ y $N/2$ fotones en $\mathbf{e}_y$ al medir en un estado ortogonal a $\mathbf{e}$ llamado $\mathbf{e}'$ sabemos que ningún fotón en el estado $\mathbf{e}$ pasaría pero la mitad de los fotones de la mezcla estadística si pasarían.

encuesta

- También podemos entender la importancia de la fase relativa entre los estados pues en el caso de polarización, los estados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \\
\mathbf{e}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)
\end{aligned}
$$

que difieren sólo en fase relativa representan estados físicos muy distintos (lineal en las diagonales y circular derecha e izquierda respectivamente)



Regresando al ejemplo cuántico

Para $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ $\quad \hat{N} = 0|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1|$

Con 50% de prob obtenemos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ igual que en el caso de mezcla estadística.

Si ahora medimos $\hat{M} = a\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0|+\langle 1|}{\sqrt{2}}\right) + b\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0|-\langle 1|}{\sqrt{2}}\right)$

Para $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ si medimos $\hat{M}$, siempre sale que sí está en el estado $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

Pero ¿Cómo analizamos la mezcla estadística?

$$\hat{M} = a\frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}}\frac{(\langle 0|+\langle 1|)}{\sqrt{2}} + b\frac{(|0\rangle-|1\rangle)}{\sqrt{2}}\frac{(\langle 0|-\langle 1|)}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\left[|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right] + \frac{b}{2}\left[|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right]$$

de esta forma sí son claros los e-vectores

de esta forma no son claros los e-vectores

Para la Mezcla

$|0\rangle$

$$P(a) = \left|\left(\frac{\langle 0|+\langle 1|}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(b) = \left|\left(\frac{\langle 0|-\langle 1|}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$|1\rangle$

$$P(a) = \dots = \frac{1}{2}$$

$$P(b) = \dots = \frac{1}{2}$$

Sigue saliendo $1/2$ y $1/2$

$\therefore$ Se puede distingir entre un estado de superposición y una mezcla estadística midiendo en distintas bases.

De la tarea 2 del Sem. pasado

Ejercicio 8: Fases globales y fases relativas

Una fase es un factor $e^{i\phi}$ en una combinación lineal. Se le llama "fase global" cuando es posible factorizarla de la combinación lineal y "fase relativa" si no se puede factorizar. El objetivo de este ejercicio es resaltar que una fase global de un estado no tiene significado físico mientras que una fase relativa dentro de una superposición sí lo tiene.

a. Muestra que para un observable arbitrario $\hat{A}$, su valor esperado $\langle \hat{A} \rangle$ es el mismo para los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$ con φ un número real.

b. Considerando una base ortonormal $\{|\phi_n\rangle\}$ de eigenvectores de $\hat{A}$ con eigenvalores discretos y no degenerados $\{a_n\}$. Muestra que para un estado normalizado dado por $|\psi\rangle = \sum_n e^{i\varphi}c_n|\phi_n\rangle$ la probabilidad de obtener el resultado a_n al hacer una medición no depende de φ.

c. Considera la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, el estado $|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y los operadores $\hat{B} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ y $\hat{C} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ y contesta las siguientes preguntas:

   I Calcula $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle$.

   II Escribe los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{C}$ y $\hat{B}$ y usa esto para argumentar por qué $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ depende de θ mientras que $\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle$ no.

e-vectores de $\hat{C}$ son $|1\rangle, |2\rangle$

e-vectores de $\hat{B}$ son $\frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = \left(\langle 1| + e^{-i\theta}\langle 2|\right)\hat{B}\left(|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle\right)$$
$$= e^{i\theta}\langle 1|1\rangle + e^{-i\theta}\langle 2|2\rangle = 2\cos\theta$$

$$\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle = \langle 1|1\rangle + \langle 2|2\rangle = 2$$

$\therefore$ La fase global $e^{i\varphi}(|1\rangle + |2\rangle)$ no tiene efecto medible pero $|1\rangle + e^{i\varphi}|2\rangle$ que es relativa, sí importa.