Mecánica Cuántica

Semestre 2024-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 4
Entrega: 03/05/2024

Ejercicio 1: Teorema del Virial **1 pts**

Muesta usando los operadores de escalera $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ que si un oscilador armónico se encuentra en un egienestado de energía, obedece la relación

$$\left\langle \hat{T} \right\rangle = \left\langle \hat{V} \right\rangle,$$

donde $\hat{T}$ y $\hat{V}$ son los operadores de energía cinética y potencial respectivamente.

Ejercicio 2: Estados de oscilador armónico **2 pts**

Considera un oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω. Su estado inicial normalizado es

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle,$$

donde $|\phi_n\rangle$ son los eigenvectores del Hamiltoniano con eiganvalor $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

a. ¿Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}$ de que al medir la energía al tiempo $t > 0$ obtengamos un resultado mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $\mathcal{P} = 0$ ¿Qué coeficientes c_n son distintos de cero?

b. De ahora en adelante, supongamos que sólo c_0 y c_1 son distintos de cero. Escribe la condición de normalización para $|\psi(0)\rangle$ y el valor esperado $\langle H\rangle$ en términos de c_0 y c_1. Agregando el requisido de que $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcula $|c_0|^2$ y $|c_1|^2$.

Ejercicio 3: Estados estacionarios del oscilador armónico **2 pts**

Considera un oscilador armónico cuántico con frecuencia ω y masa m.

a. Si el sistema se encuentra en el estado base $|\phi_0\rangle$ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula afuera de la región permitida clásicamente?
Llegarás a una integral que no se puede resolver analíticamente usa el recurso que prefieras (web/programa/tabla) para calcularla.

b. Usa el operador de ascenso $\hat{a}^\dagger$ para encontrar una expresión para $\phi_1(x) = \langle x|\phi_1\rangle$ a partir de $\phi_0(x)$.

c. Usa el operador de ascenso $\hat{a}^\dagger$ para encontrar una expresión para $\phi_2(x) = \langle x|\phi_2\rangle$ a partir de $\phi_1(x)$.

Ejercicio 4: Estados coherentes **2 pts**

Usando la notación usual de oscilador armónico:

a. Muestra directamente que un estado coherente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle \, ,$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ es un egienvector del operador de descenso a.

b. Calcula el valor esperado de X y P si el sistema de encuentra en el estado coherente $|\alpha\rangle$.

c. Calcula el valor esperado de X^2 y P^2 si el sistema de encuentra en el estado coherente $|\alpha\rangle$ y calcula $\Delta X \Delta P$.

d. Muestra que si un oscilador armónico inicia en un estado coherente $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, después de un tiempo $t > 0$ el estado $|\psi(t)\rangle$ seguirá siendo un estado coherente. Es decir. seguirá siendo un eigenvector de $\hat{a}$ pero con distinto eigenvalor. ¿Cuál es este nuevo eigenvalor?

e. Usa los resultados anteriores para obtener $\langle X \rangle (t)$ y $\langle P \rangle (t)$ para un oscilador armónico cuya condición inicial es un estado coherente.

f. Calcula el producto escalar $\langle \alpha | \alpha' \rangle$ entre dos estados coherentes. ¿Forman los estados coherentes una base ortonormal?

Ejercicio 5: Representación de momento **2 pts**

Considera un oscilador armónico cuántico con frecuencia ω y masa m.

a. Encuentra la función de onda en la representación de momento del estado base del oscilador armónico $\phi_0(p)$ usando $\hat{a} |\phi_0\rangle = 0$. Presenta tu respuesta de forma normalizada.

b. Usa el operador de ascenso $a^\dagger$ para encontrar una expresión para $\phi_1(p) = \langle p | \phi_1 \rangle$ a partir de $\phi_0(p)$.

c. ¿Cómo se comparan $|\phi_0\rangle$ y $|\phi_1\rangle$ en la representaciones x y p?

Ejercicio 6: Paridad de estados **2 pts**

Considera el operador de paridad $\hat{\Pi}$ cuyo efecto sobre un eigenvector de posición es transformarlo en el eigenvector de posición aosiciado al punto diametralmente opuesto respecto al cero. Es decir

$$\hat{\Pi} |x\rangle = |-x\rangle \, .$$

a. Muestra que si $\psi(x)$ es la función de onda de posición asociada al estado $|\psi\rangle$ entonces la función de onda asociada a $\hat{\Pi}\,|\psi\rangle$ es $\psi(-x)$.

b. Muestra que si $\psi(p)$ es la función de onda de momento asociada al estado $|\psi\rangle$ entonces la función de onda asociada a $\hat{\Pi}\,|\psi\rangle$ es $\psi(-p)$.

c. Muestra que los eigenvalores de $\hat{\Pi}$ son ± 1. (Hint: Muestra que $\hat{\Pi}$ es su propio inverso y aplica $\hat{\Pi}^2$ a un eigenvector de $\hat{\Pi}$).

d. Comprueba que las funciones de onda de posición asociadas a egienvectores de $\hat{\Pi}$ son las funciones pares o impares.

e. Muestra que $\hat{\Pi}$ conmuta con el hamiltoniano del oscilador armónico.

f. ¿Qué implicación tienen los resultados anteriores sobre las eigenfunciones del hamiltoniano del oscilador armónico?