Mecánica Cuántica

Semestre 2024-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 3

Entrega: 10/04/2024

Ejercicio 1: Pozo infinito **1.5 pts**

El objetivo de este ejercicio es repasar las soluciones y argumentos asociados al problema del pozo cuadrado infinito . Considera una partícula de masa m que se mueve en una dimensión cuyo Hamiltoniano es $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X})$ con

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases}$$

En la representación de posición $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ y la ecuación de eigenvalores del hamiltoniano $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$ toma la forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Fuera del pozo se debe cumplir que $\psi(x) = 0$. Esto define las condiciones de frontera.

a. Encuentra las eigenfunciones y eigenvalores que son solución esta ecuación. Escribe tus soluciones de forma normalizada.

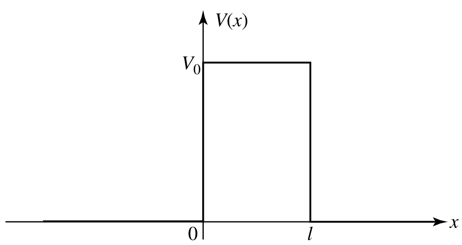
b. Haz un dibujo de algunas de las soluciones obtenidas.

c. Muestra que las soluciones obtenidas son ortonormales calculando el producto interno entre dos eigenfunciones distintas arbitrarias.

d. Calcula la desviación RMS de la posición $\Delta\hat{X}$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano. ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

Ejercicio 2: Tunelaje cuántico **0.5 pts**

En clase discutimos que para una partícula de masa m que incide con una energía E en una barrera de potencial de ancho l y altura V_0 como en el dibujo,



el coeficiente de transmisión para $E < V_0$ es

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2(\rho l)} \qquad\qquad \rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar.$$

Muestra que cuando $\rho l \gg 1$ la transmisión disminuye exponencialmente con el grosor de la barrera y encuentra una expresión aproximada para T.

Ejercicio 3: Potencial Lineal **2 pts**

Considera una partícula de masa m confinada a moverse en la región $x > 0$ y sujeta a un potencial lineal dado por $V(x) = \alpha x$ con α una constante real positiva. Encuentra las eigenfunciones del hamiltoniano para este problema y, dado que no se pueden obtener los eigenvalores analíticamente, encuentra la ecuación que sería necesario resolver numéricamente para obtenerlos. No es necesario que presentes las eigenfunciones de manera normalizada.

Para resolver esto puedes usar que la ecuación de Airy dada por $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - xy = 0$ tiene como solución general una combinación lineal de las funciones $\mathrm{Ai}(x)$ y $\mathrm{Bi}(x)$ conocidas como funciones de Airy del primer y segundo tipo. Además puedes dar por hecho que $\mathrm{Bi}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ mientras que $\mathrm{Ai}(x)$ es una función acotada.

Ejercicio 4: Potencial Delta de Dirac **1 pts**

En ocasiones puede ser útil modelar la interacción entre partículas utilizando un potencial

$$V(x) = \lambda \delta(x),$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Este tipo de potencial puede verse como el caso límite del pozo o barrera de potencial cuando el ancho tiende a cero pero la profundidad tiende a infinito y podría usarse, por ejemplo, para modelar una interacción de contacto.

Muestra que para $\lambda < 0$ existe un eigenestado ligado (con $E < 0$). Encuentra y dibuja su función de onda resolviendo la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m. Grafica la solución obtenida.

Para resolver este ejercicio, considera que si $x < 0$ o $x > 0$, se tiene que $V(x) = 0$ y en ese caso ya conoces la solución general a la ecuación de Schrödinger. La dificultad para encontrar $\psi(x)$ radica en saber cómo unir las dos soluciones obtenidas. Normalmente bastaría utilizar la condición de continuidad de la función de onda y de su derivada además de la condición de normalización $\int |\psi|^2 = 1$ para determinar por completo la función de onda. Sin embargo, cuando obtuvimos la condición de continuidad de la derivada en clase utilizamos la hipótesis de que el potencial era acotado lo cual no se cumple en este caso. Para encontrar la condición que cumple $\psi'(x)$ en $x = 0$, integra la ecuación

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

alrededor de un intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ y analiza el caso $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 5: Transmisión en una cavidad de deltas **2 pts**

Considera una partícula de masa m sujeta a un potencial

$$V(x) = \lambda\delta(x) + \lambda\delta(x-a)$$

con a una longitud fija.

a. Calcula el coeficiente de reflexión R y transmisión T para una partícula con energía positiva $E > 0$ que se propaga desde $x = -\infty$ hacia $x = 0$. Dado que $V(x)$ no es finito en este caso no es posible usar la condición de que la derivada de la función de onda debe ser continua y, en cambio, será necesario usar la condición que obtuviste en el ejercicio anterior para cada $\delta(x)$.

b. Grafica el resultado obtenido ¿Bajo qué condiciones se obtienen resonancias de transmisión?

Ejercicio 6: Esquema de interacción **2 pts**

En clase discutimos los esquemas de Heisenberg y Schrödinger para describir la dinámica de un sistema. En el de Schrödinger los operadores son estáticos mientras los kets evolucionan en el tiempo y en el esquema de Heisenberg se toma el enfoque opuesto. En este ejercicio desarrollarás el esquema de interacción que es un caso intermedio entre ambos.

Considera un sistema físico arbitrario, donde su Hamiltoniano es $H_0(t)$ y su operador de evolución asociado es $U_0(t, t_0)$ con $U_0(t, t) = \mathbb{1}$.

a. Muestra que la ecuación de Schrödinger implica que el operador de evolución cumple

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0(t, t_0) = H_0(t)U_0(t, t_0).$$

(hicimos esto en clase).

(Para incisos b y c)

Suponiendo que el sistema es perturbado por una "interacción" $W(t)$ de tal modo que su Hamiltoniano total se convierte en

$$H(t) = H_0(t) + W(t)$$

Denotando al vector de estado en el esquema de interacción con $|\psi_I(t)\rangle$, que en términos del vector de estado en el esquema de Schrödinger es $|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0)\,|\psi_S(t)\rangle$.

b. Muestra que la ecuación de evolución para $|\psi_I(t)\rangle$ es

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi_I(t)\rangle = W_I(t)\,|\psi_I(t)\rangle\,,$$

donde $W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)W(t)U_0(t, t_0)$.

c. Explica cualitativamente por qué cuando la perturbación $W(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$ la dinámica del vector $|\psi_I(t)\rangle$ es mucho más lenta que la de $|\psi_S(t)\rangle$.

En estos dos incisos se muestra la utilidad del esquema de interacción: Conociendo la dinámica correspondiente a $H_0(t)$, en el esquema de interacción la ecuación de Schrödinger restante sólo involucra a $W(t)$.

Ejercicio 7: Evolución temporal de un sistema de dos niveles **2 pts**
Considera un sistema de dos estados que describimos en la base ortonormal $\{|b\rangle, |e\rangle\}$. En esta base, podemos escribir al Hamiltoniano como

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}(|b\rangle\langle e| + |e\rangle\langle b|),$$

con Ω un número real. Éste es el Hamiltoniano de un átomo interactuando con luz resonante a la transición atómica o bien un espín interactuando con un campo magnético oscilante lo cual es relevante para describir la resonancia magnética nuclear utilizada para imagenología.

a. Encuentra los egienvalores y eigenvecotres de H.

b. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|b\rangle$ y cuando inicia en el estado $|e\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|b\rangle$ al tiempo t? Grafica tu respuesta.
(*Hint: escribe $|\psi(0)\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores del Hamiltoniano.*)