Mecánica Cuántica

Semestre 2024-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 2
Entrega: 11 marzo 2024

Ejercicio 1: El conmutador de $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$

Calcula el conmutador entre $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$. Puedes usar que $\langle \mathbf{r}|\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\langle \mathbf{r}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r})$ o que $\langle \mathbf{p}|\hat{\mathbf{P}}|\psi\rangle = \mathbf{p}\langle \mathbf{p}|\psi\rangle = \mathbf{p}\psi(\mathbf{p})$.

Ejercicio 2: El conmutador de $[\hat{P}, V(\hat{X})]$

En este ejercicio mostrarás que $[\hat{P}, V(\hat{X})] = -i\hbar V'(\hat{X})$.

a. Usando que $\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar$ muestra que $\left[\hat{P}, \hat{X}^n\right] = -i\hbar n\hat{X}^{n-1}$.
(*Sugerencia:* Usa inducción matemática.)

b. Usa el inciso anterior para mostrar que $[\hat{P}, V(\hat{X})] = -i\hbar V'(\hat{X})$
(*Sugerencia:* Escribe $V(x)$ usando su expansión en serie de Taylor.)

Ejercicio 3: Operadores de posición y momento

Calcula el conmutador $\left[\hat{X}^2, \hat{P}^2\right]$ en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$. Es decir, déjalo en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$ sin exponente.

Ejercicio 4: Representación de posición y momento

En clase mostramos que $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. En este inciso mostrarás una relación análoga para la representación $\{|p\rangle\}$. Muestra que

a. Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ la función de onda en el espacio de momento, el efecto de aplicar el operador $\hat{X}$ es:
$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p)$$

b. Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ y $\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$ funciones de onda en el espacio de momento, los elementos de matriz del operador $\hat{X}$ están dados por:
$$\langle\varphi|X|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p\, \varphi^*(p) i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p),$$

Ejercicio 5: Valor esperado y desviación RMS

En este ejercicio revisarás y aplicarás las definiciones de valor esperado y de desviación RMS. Considera las funciones de onda adimensionales

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2} \qquad \text{y} \qquad \psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2\alpha}\, x e^{-\alpha x^2/2},$$

con α una constante positiva.

a. Calcula $\left\langle \hat{X} \right\rangle$ para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$.

b. Calcula ΔX para $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$.

c. Realiza un dibujo donde muestres $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $|\psi_0(x)|^2$, $|\psi_1(x)|^2$ y las cantidadas calculadas en los incisos anteriores.

Ejercicio 6: Relación de incertidumbre generalizada

En este ejercicio demostrarás la relación de incertidumbre generalizada para dos operadores hermitianos $\hat{A}$ y $\hat{B}$,

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle \right)^2,$$

donde $\Delta A^2 = \left\langle \left(\hat{A} - \left\langle \hat{A} \right\rangle\right)^2 \right\rangle$ y $\Delta B^2 = \left\langle \left(\hat{B} - \left\langle \hat{B} \right\rangle\right)^2 \right\rangle$.

a. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\langle \phi_1|\phi_2\rangle|^2 \leq \langle \phi_1|\phi_1\rangle \langle \phi_2|\phi_2\rangle$

   I. Definiendo $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + \lambda |\phi_2\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, encuentra la desigualdad resultante de $\langle \psi|\psi\rangle \geq 0$.

   II. La desigualdad obtenida es válida para toda λ. En particular para $\lambda = -\langle \phi_2|\phi_1\rangle / \langle \phi_2|\phi_2\rangle$. Usa esto para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

b. Usando esta desigualdad para $|f\rangle = \left(\hat{A} - \left\langle \hat{A} \right\rangle\right) |\psi\rangle$ y $|g\rangle = \left(\hat{B} - \left\langle \hat{B} \right\rangle\right) |\psi\rangle$ obtén que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2.$$

c. Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i}(z - z^*)\right]^2$.

d. Muestra que $\langle f|g\rangle = \left\langle \hat{A}\hat{B} \right\rangle - \left\langle \hat{A} \right\rangle \left\langle \hat{B} \right\rangle$ y $\langle g|f\rangle = \left\langle \hat{B}\hat{A} \right\rangle - \left\langle \hat{B} \right\rangle \left\langle \hat{A} \right\rangle$.

e. Concluye que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle \right)^2.$$

f. ¿Qué forma toma la relación de incertidumbre para $\hat{A} = \hat{X}$ y $\hat{B} = \hat{P}$?

Nota: el conmutador de dos operadores Hermitianos tiene un factor de i por lo que la cantidad dentro de el paréntesis es real y por tanto su cuadrado es positivo.

Ejercicio 7: Densidad de corriente de probabilidad

En este ejercicio profundizarás en el concepto de densidad de corriente de probabilidad de una función de onda $\psi(\mathbf{r})$ definido por $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi}[\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi - \psi \boldsymbol{\nabla}\psi^*]$.

a. Considera los paquetes de onda unidimensionales dados por $\psi_1(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right)$ y $\psi_2(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2} + ikx\right)$ con N, L y k constantes reales positivas.

   I Calcula $|\psi_1(x)|^2$, $|\psi_2(x)|^2$ y dibújalas en función de x.

   II Calcula la densidad de corriente de probabilidad para $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$. Agrega flechas a tu dibujo del inciso anterior indicando hacia dónde fluye la probabilidad.

b. Escribiendo a la función de onda tridimensional en su descomposición polar como $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}$, con S y ρ funciones reales. Muestra que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{m}$ usando la definición de densidad de corriente de probabilidad vista en clase.

c. Considerando los resultados de los incisos anteriores ¿Cómo se relacionan la densidad de corriente de probabilidad y la fase de una función de onda?

Ejercicio 8: Fases globales y fases relativas

Una fase es un factor $e^{i\phi}$ en una combinación lineal. Se le llama "fase global" cuando es posible factorizarla de la combinación lineal y "fase relativa" si no se puede factorizar. El objetivo de este ejercicio es resaltar que una fase global de un estado no tiene significado físico mientras que una fase relativa dentro de una superposición sí lo tiene.

a. Muestra que para un observable arbitrario $\hat{A}$, su valor esperado $\left\langle \hat{A} \right\rangle$ es el mismo para los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$ con φ un número real.

b. Considerando una base ortonormal $\{|\phi_n\rangle\}$ de eigenvectores de $\hat{A}$ con eigenvalores discretos y no degenerados $\{a_n\}$. Muestra que para un estado normalizado dado por $|\psi\rangle = \sum_n e^{i\varphi}c_n|\phi_n\rangle$ la probabilidad de obtener el resultado a_n al hacer una medición no depende de φ.

c. Considera la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, el estado $|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y los operadores $\hat{B} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ y $\hat{C} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ y contesta las siguientes preguntas:

   I Calcula $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle$.

   II Escribe los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{C}$ y $\hat{B}$ y usa esto para argumentar por qué $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ depende de θ mientras que $\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle$ no.

Ejercicio 9: Observables compatibles

En clase se discutió que si dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ satisfacen $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ entonces estos dos observables se pueden medir simultáneamente sin que la medición de una afecte al resultado de la otra. Es decir, $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son observables compatibles. Sin embargo el argumento fue presentado de manera parcial y el objetivo de este ejercicio es completarlo.

a. Partiendo de un estado arbitrario escrito como combinación lineal de la base ortonormal de eigenvectores de estos observables

$$|\psi\rangle = \sum_{n,p,i} c_{n,p,i} |a_n, b_p, i\rangle ,$$

donde a_n son los eigenvalores de $\hat{A}$ y b_p son los eigenvalores de $\hat{B}$ y el índice i se utiliza para distinguir entre vectores distintos que corresponden al mismo valor de a_n y b_p. Muestra que la probabilidad de medir $\hat{A}$ y obtener a_n y luego medir $\hat{B}$ y obtener b_p, denotada por $\mathcal{P}^{AB}(a_n, b_p)$, es la misma que la probabilidad de medir $\hat{B}$ y obtener b_p y luego medir $\hat{A}$ y obtener a_n que denotamos por $\mathcal{P}^{BA}(b_p, a_n)$.

b. En este inciso construiremos un ejemplo de dos operadores incompatibles. Considera dos operadores $\hat{C}$ y $\hat{D}$. El operador $\hat{C}$ tiene como eigenvectores a $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ con eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente mientras que $\hat{D}$ tiene como eigenvectores a $|+\rangle = \frac{|\alpha\rangle+|\beta\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|-\rangle = \frac{|\alpha\rangle-|\beta\rangle}{\sqrt{2}}$ con eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente.

Si el estado inicial del sistema es $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$. Calcula la probabilidad de medir $\hat{C}$ y obtener $+1$ y luego medir $\hat{D}$ y obtener $+1$. Compara esto con la probabilidad de medir $\hat{D}$ y obtener $+1$ y luego medir $\hat{C}$ y obtener $+1$.

Este ejemplo es análogo a lo que ocurre al medir posición y momento sucesivamente; al medir uno borra la información del estado que se tiene del otro.

Nota: La probabilidad $\mathcal{P}^{AB}(a_n, b_p) = \mathcal{P}^{A}(a_n)\mathcal{P}^{B}_{A:a_n}(b_p)$, donde $\mathcal{P}^{A}(a_n)$ es la probabilidad de medir A y obtener a_n y $\mathcal{P}^{B}_{A:a_n}(b_p)$ es la probabilidad de medir B y obtener b_p condicionado a haber medido A y obtenido a_n como resultado en una medición anterior.