

Mecánica Cuántica
Semestre 2024-2
Prof: Asaf Paris Mandoki
Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez
Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez



Tarea 1
Entrega: 16/02/2024

El objetivo principal de esta tarea es que te familiarices con

Ejercicio 1: Notación de Dirac

Considera un espacio cuya base ortonormal está dada por los kets $\gamma = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Manteniendo este orden para la base, contesta los siguientes incisos:

- Escribe la representación en componentes de $|2\rangle$.
- Escribe la representación en componentes de $\frac{|2\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}$.
- Escribe la representación en componentes de los operadores $|3\rangle\langle 2|$ y de $|2\rangle\langle 3|$.
- Escribe la representación en componentes de $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|$.

Ejercicio 2: Operadores y conmutadores

Sean \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} operadores. Muestra que:

- $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$
- $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$.
- $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$.
- $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.

Ejercicio 3: Valores y vectores propios

Considera el operador $\hat{\sigma}_y$ cuya matriz, escrita en la base ortonormal $\gamma = \{|1\rangle, |2\rangle\}$, se escribe como

$$[\hat{\sigma}_y]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

- Escribe $\hat{\sigma}_y$ usando notación de Dirac en términos de los vectores de la base.
- ¿Es $\hat{\sigma}_y$ Hermitiano? Muéstralo.
- Encuentra los valores y vectores propios de $\hat{\sigma}_y$ (escribiendo su expansión en términos de la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$).
- Encuentra las matrices que representan a los proyectores a estos eigenvectores.

- e. Verifica que los eigenvectores encontrados satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completud.

Ejercicio 4: Eigenespacios

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- Encuentra sus eigenvalores y eigenvectores.
- Haz un boceto junto con una explicación del eigenespacio correspondiente a cada uno de los eigenvalores encontrados. Es decir, para cada eigenvalor, describe la forma de los conjuntos de todos los eigenvectores que que le corresponden.

Ejercicio 5: Base de eigenvectores

Considera un observable \hat{H} y una base de sus eigenvectores $|\phi_n\rangle$. Dando por hecho que los $|\phi_n\rangle$ forman una base discreta ortonormal considera el operador $\hat{U}(m, n)$ definido como

$$\hat{U}(m, n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$$

- Calcula el adjunto $\hat{U}^\dagger(m, n)$ de $\hat{U}(m, n)$.
- Calcula el conmutador $[\hat{H}, \hat{U}(m, n)]$.
- Muestra que $\hat{U}(m, n)\hat{U}^\dagger(p, q) = \delta_{nq}\hat{U}(m, p)$.
- Si \hat{A} es un operador cuyos elementos de matriz son $A_{mn} = \langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle$ muestra que

$$\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn}\hat{U}(m, n).$$

Ejercicio 6: Conjunto completo de observables que conmutan

Considera un sistema físico cuyo espacio de estados es generado por los vectores base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Usando esta base definimos a los operadores

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(|u_1\rangle\langle u_1| - |u_2\rangle\langle u_2| - |u_3\rangle\langle u_3|) \quad \hat{B} = b(|u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_3| + |u_3\rangle\langle u_2|),$$

donde ω_0 y b son constantes reales.

- ¿Son \hat{H} y \hat{B} Hermitianos? Muéstralo.
- Muestra que \hat{H} y \hat{B} conmutan.
- Encuentra un conjunto de eigenvectores comunes a \hat{H} y \hat{B} .

Ejercicio 7: Postulados de la Mecánica Cuántica

Tomando en cuenta el cuarto postulado para el caso de un espectro discreto no degenerado, muestra que la suma de las probabilidades de obtener todos los resultados es 1. ¿Qué significa este resultado?