# Mecánica Cuántica

**Semestre 2023-2**

**Prof: Asaf Paris Mandoki**

**Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez**

**Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez**

**Tarea 5**
**Entrega: 24/05/2022**

**Ejercicio 1**: Estado de un espín

En clase hablamos acerca del operador asociado al observable de espín $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ donde, en la base de eigenvectores de $S^2$ y $S_z$ denotados por

$$\{|s = 1/2, m_s = 1/2\rangle = |+\rangle, |s = 1/2, m_s = -1/2\rangle = |-\rangle\},$$

las representaciones matriciales de las componentes son

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de estos operadores podemos obtener el observable de espín en una dirección arbitraria $\vec{u}$ determinada por los ángulos $\theta$ y $\varphi$ por medio de

$$\vec{S} \cdot \vec{u} = S_u = S_x \sin\theta \cos\varphi + S_y \sin\theta \sin\varphi + S_z \cos\theta$$

Muestra que

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$
$$|-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$

son los eigenvectores de $S_u$.

**Ejercicio 2**: Valores esperados de para $j = 1$

Considera un sistema con momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados está generado por la base $\{|1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de eigenvectores comunes a $J^2$ y $J_z$ de la forma $|j, m\rangle$. Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle,$$

con $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ números complejos:

a Calcula el valor esperado $\left\langle \vec{J} \right\rangle$ en términos de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$.

b Encuentra una expresión para los valores esperados $\langle J_x^2 \rangle$, $\langle J_y^2 \rangle$ y $\langle J_z^2 \rangle$ en términos de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$.

**Ejercicio 3**: Relaciones de conmutación

Siguiendo la notación de suma de Einstein donde se suma sobre los índices repetidos (sin necesidad de poner el símbolo $\Sigma$) podemos escribir las componentes cartesianas de $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ como $L_k = \varepsilon_{ijk} R_i P_j$ con $\varepsilon_{ijk}$ el símbolo de Levi-Civita. Muestra las siguientes relaciones de conmutación:

a $[L_i, R_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} R_k$

b $[L_i, P_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} P_k$

c $\left[L_i, P^2\right] = \left[L_i, R^2\right] = \left[L_i, \vec{R} \cdot \vec{P}\right] = 0$

**Ejercicio 4**: Cambio de eje de cuantización

Considera un sistema físico arbitrario cuyo espacio de estados de 4 dimensiones se genera por los cuatro eigenvectores comunes de $J^2$ y $J_z$ para $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$.

a Escribe los cuatro eigenvectores comunes de $J^2$ y $J_z$, $|j, m_z\rangle$ para $j \in \{0, 1\}$. Aquí no tienes que hacer ningún cálculo, sólo hace falta que los enlistes.

b Escribe los eigenvectores comunes a $J^2$ y $J_x$ denotados por $|j, m_x\rangle$ en términos de los $|j, m_z\rangle$. Para hacer esto escribe a $J_x$ como matriz en la base que escribiste en el inciso anterior. Al diagonalizar esta matriz encontrarás los eigenvecotres de $J_x$ en términos de los eigenvectores de $J_z$. ¿Cuáles son los eigenvaores de $J_x$?
(Recuerda que puedes auxiliarte de una computadora para diagonalizar)

**Ejercicio 5**: Desviación RMS en momento angular

Considerando un eigenestado de momento angular arbitrario $|\ell, m\rangle$. Encuentra:
$\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, $\Delta L_x$, $\Delta L_y$, $\Delta L_z$.

**Ejercicio 6**: Teorema Hellman-Feynman: observables de H

El Teorema de Hellman-Feynan es útil para calcular observables para el átomo de hidrógeno. Este teorema dice que si tenemos un Hamiltoniano $H(\lambda)$ que depende de un parámetro real $\lambda$ y un eigenvector normalizado $|\psi(\lambda)\rangle$ de $H(\lambda)$ con eigenvalor $E(\lambda)$ entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}E(\lambda) = \langle\psi(\lambda)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}H(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle \,.$$

a Demuestra este teorema. (Hint: calcula la derivada de $H(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle$ respecto a $\lambda$ usando la regla usual de la derivada de un producto y multiplica por $\langle\psi(\lambda)|$.)

Una manera de calcular valores esperado como $\langle 1/r\rangle$ y $\langle 1/r^2\rangle$ para el átomo de hidrógeno es calcular las integrales $\int R_{nl}(r)\frac{1}{r}R_{nl}(r)r^2\,\mathrm{d}r$ y $\int R_{nl}(r)\frac{1}{r^2}R_{nl}(r)r^2\,\mathrm{d}r$ respectivamente. El Teorema de Hellman-Feynman nos ofrece una alternativa ingeniosa a este cálculo. Considerando la ecuación radial para las funciones de onda, ésta tiene un Hamiltoniano de la forma

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}r + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

donde notamos que tenemos un término proporcional a $1/r$ y otro a $1/r^2$.

b Derivando $H_r$ respecto a $e$ vemos que podemos aislar el término $1/r$. Usa esto, el teorema de Hellman-Feynman y los eigenvalores conocidos de hidrógeno para obtener una expresión para $\langle 1/r\rangle$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano.

c Calcula $\left\langle \frac{1}{r^2}\right\rangle$ cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano usando el mismo método. En este caso es necesario derivar respecto a $\ell$ y recordar que $n = \ell + k$, donde $k$ era una constante por lo que $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\ell} = 1$ .

Nota: en el planteamiento original de la ecuación $e$ y $\ell$ eran parámetros fijos. Este método se aprovecha de considerarlos como variables.

**Ejercicio Extra 1** : Operadores escalera de momento angular **+1**

En clase encontramos que los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ con $m = \ell$ tienen la forma

$$Y_\ell^\ell(\theta,\varphi) = N\sin^\ell\theta e^{i\ell\varphi},$$

donde $N$ es una constante de normalización.

a. Calcula $N$ para el caso $\ell = 1$.

b. Usa $L_-$ para obtener $Y_1^0(\theta,\varphi)$ y $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$.