Mecánica Cuántica

Semestre 2023-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 3
Entrega: 29/03/2023

Ejercicio 1: Densidad de corriente de probabilidad

Definiendo $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{iS(\mathbf{r})/\hbar}$, con S y ρ funciones reales. Muestra que $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho\frac{\nabla S}{m}$ usando la definición de densidad de corriente de probabilidad vista en clase. De esta manera podemos ver que la dirección a la que apunta $\mathbf{J}$ depende únicamente de S.

Ejercicio 2: Evolución temporal de un sistema de dos niveles

Considera un sistema de dos estados que describimos en la base ortonormal $\{|b\rangle, |e\rangle\}$. En esta base, podemos escribir al Hamiltoniano como

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}(|b\rangle\langle e| + |e\rangle\langle b|),$$

con Ω un número real. Éste es el Hamiltoniano de un átomo interactuando con luz resonante a la transición atómica o bien un espín interactuando con un campo magnético oscilante lo cual es relevante para describir la resonancia magnética nuclear utilizada para imagenología.

a. Encuentra los egienvalores y eigenvecotres de H.

b. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado

$$|\psi(t=0)\rangle = |b\rangle\,.$$

¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|b\rangle$ al tiempo t? Grafica tu respuesta.
(*Hint: escribe $|\psi(0)\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores del Hamiltoniano.*)

c. Encuentra la evolución temporal $|\psi(t)\rangle$ del sistema si inicia en el estado $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|b\rangle$ al tiempo t? Grafica tu respuesta.

Ejercicio 3: Evolución temporal en pozo infinito

Considera una particula que se mueve en una dimensión dentro de en un pozo infinito de la forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Para este las eigenfunciones del Hamiltoniano normalizadas tienen la forma

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con eigenvalores de energía correspondientes $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$. A un tiempo $t = 0$ la partícula está en un estado descrito por la función de onda

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}(\sin(\pi x/L) + \sin(2\pi x/L)).$$

Encuentra la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula a un tiempo t en el punto x como función de x y t. Visualiza tu resultado usando una computadora graficándola en función de x para distintos valores de t.

Ejercicio 4: Esquema de interacción

En clase discutimos los esquemas de Heisenberg y Schrödinger para describir la dinámica de un sistema. En el de Schrödinger los operadores son estáticos mientras los kets evolucionan en el tiempo y en el esquema de Heisenberg se toma el enfoque opuesto. En este ejercicio desarrollarás el esquema de interacción que es un caso intermedio entre ambos.

Considera un sistema físico arbitrario, donde su Hamiltoniano es $H_0(t)$ y su operador de evolución asociado es $U_0(t, t_0)$ con $U_0(t, t) = \mathbb{1}$.

a Muestra que la ecuación de Schrödinger implica que el operador de evolución cumple

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0(t, t_0) = H_0(t)U_0(t, t_0).$$

(hicimos esto en clase).

(Para incisos b y c)

Suponiendo que el sistema es perturbado por una "interacción" $W(t)$ de tal modo que su Hamiltoniano total se convierte en

$$H(t) = H_0(t) + W(t)$$

Denotando al vector de estado en el esquema de interacción con $|\psi_I(t)\rangle$, que en términos del vector de estado en el esquema de Schrödinger es $|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0)\,|\psi_S(t)\rangle$.

b Muestra que la ecuación de evolución para $|\psi_I(t)\rangle$ es

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi_I(t)\rangle = W_I(t)\,|\psi_I(t)\rangle\,,$$

donde $W_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)W(t)U_0(t, t_0)$.

c Explica cualitativamente por qué cuando la perturbación $W(t)$ es mucho menor que $H_0(t)$ la dinámica del vector $|\psi_I(t)\rangle$ es mucho más lenta que la de $|\psi_S(t)\rangle$.

En estos dos incisos se muestra la utilidad del esquema de interacción: Conociendo la dinámica correspondiente a $H_0(t)$, en el esquema de interacción la ecuación de Schrödinger restante sólo involucra a $W(t)$.

Ejercicio Extra 1 : Potencial Delta de Dirac **+1**

En ocasiones modelar la interacción entre partículas utilizando un potencial

$$V(x) = \lambda \delta(x),$$

donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Este tipo de potencial puede verse como el caso límite del pozo o barrera de potencial cuando el ancho tiende a cero pero la profundidad tiende a infinito y podría usarse, por ejemplo, para modelar una interacción de contacto.

Muestra que para $\lambda < 0$ existe un eigenestado ligado (con $E < 0$) y encuentra su función de onda resolviendo la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m. Grafica la solución obtenida.

(*Hint: Para esto, considera que si $x < 0$ o $x > 0$, se tiene que $V(x) = 0$ y en ese caso ya conoces la solución general a la ecuación de Schrödinger. La dificultad para encontrar $\psi(x)$ radica en saber cómo unir las dos soluciones obtenidas. Normalmente bastaría utilizar la condición de continuidad de la función de onda y de su derivada además de la condición de normalización $\int |\psi|^2 = 1$ para determinar por completo la función de onda. Sin embargo, cuando obtuvimos la condición de continuidad de la derivada en clase utilizamos la hipótesis de que el potencial era acotado lo cual no se cumple en este caso. Para encontrar la condición que cumple $\psi'(x)$ en $x = 0$, integra la ecuación*

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

alrededor de un intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ y analiza el caso $\varepsilon \to 0$.)