Mecánica Cuántica

Semestre 2023-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Eduardo Esquivel Ramírez

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Tarea 2
Entrega: 03 marzo 2023

Ejercicio 1: Observables compatibles

En clase se discutió que si dos observables A y B satisfacen $[A, B] = 0$ entonces éstos dos observables se pueden medir simultáneamente sin que la medición de una afecte al resultado de la otra. Es decir, A y B son observables compatibles. Sin embargo el argumento fue presentado de manera parcial y el objetivo de este ejercicio es completarlo.

a. Partiendo de un estado arbitrario escrito como combinación lineal de la base ortonormal de eigenvectores de estos observables

$$|\psi\rangle = \sum_{n,p,i} c_{n,p,i} |a_n, b_p, i\rangle ,$$

donde a_n son los eigenvalores de A y b_p son los eigenvalores de B y el índice i se utiliza para distinguir entre vectores distintos que corresponden al mismo valor de a_n y b_p. Muestra que la probabilidad de medir A y obtener a_n y luego medir B y obtener b_p como resultado $\mathcal{P}^{AB}(a_n, b_p)$ es la misma que la probabilidad de medir B y obtener b_p y luego medir A y obtener a_n como resultado $\mathcal{P}^{BA}(b_p, a_n)$.

b. En este inciso construiremos un ejemplo de dos operadores incompatibles. Considera dos operadores C y D. El operador C tiene como eigenvectores a $|x\rangle$ y $|y\rangle$ con eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente mientras que D tiene como eigenvectores a $|\alpha\rangle = \frac{|x\rangle+|y\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|\beta\rangle = \frac{|x\rangle-|y\rangle}{\sqrt{2}}$ con eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente.

Si el estado inicial del sistema es $|\psi\rangle = |x\rangle$. Calcula la probabilidad de medir C y obtener $+$ y luego medir D y obtener $+$. Compara esto con la probabilidad de medir D y obtener $+$ y luego medir C y obtener $+$.

Nota: La probabilidad $\mathcal{P}^{AB}(a_n, b_p) = \mathcal{P}^{A}(a_n)\mathcal{P}^{B}_{A:a_n}(b_p)$, donde $\mathcal{P}^{A}(a_n)$ es la probabilidad de medir A y obtener a_n y $\mathcal{P}^{B}_{A:a_n}(b_p)$ es la probabilidad de medir B y obtener b_p condicionado a haber medido A y obtenido a_n como resultado en una medición anterior.

Ejercicio 2: Pozo infinito

El objetivo de este ejercicio es repasar las soluciones y argumentos asociados al problema del pozo cuadrado infinito. Considera una partícula en una dimensión cuyo Hamiltoniano es $H = \frac{P_x^2}{2m} + V(X)$ con

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{de otro modo} \end{cases}$$

a. Escribe la ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniando, $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, en términos de la función de onda en la base de posición $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ (es decir escribe la "ecuación de Schrödinger independiente del tiempo").

b. Fuera del pozo se debe cumplir que $\psi(x) = 0$, así que esto define las condiciones de frontera. Encuentra las eigenfunciones y eigenvalores que son solución de ecuación del inciso a. Escribe tu solución de forma normalizada.

c. Haz un dibujo de algunas de las soluciones obtenidas.

d. Muestra que las soluciones obtenidas son ortonormales calculando el producto interno entre dos eigenfunciones distintas arbitrarias.

e. Calcula la desviación RMS de la posición ΔX cuando el sistema se encuentra en un eigenestado del Hamiltoniano. ¿Qué te dice el resultado obtenido?

Ejercicio 3: El conmutador de $[P, V(X)]$

En este ejercicio mostrarás que $[P, V(X)] = -i\hbar V'(X)$.

a. Usando que $[X, P] = i\hbar$ muestra que $[P, X^n] = -i\hbar n X^{n-1}$. (*Sugerencia:* Usa inducción matemática.)

b. Usa el inciso anterior para mostrar que $[P, V(X)] = -i\hbar V'(X)$ (*Sugerencia:* Escribe $V(x)$ usando su expansión en serie.)

Ejercicio 4: Exponencial de un operador

Con A un operador Hermitiano y su ecuación de eigenvalores de la forma

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle,$$

considera un vector arbitrario $|\psi\rangle$.

a. Escribe a $|\psi\rangle$ como combinación lineal de eigenvectores de A.

b. Expresa $e^A|\psi\rangle$ como combinación lineal de eigenvecotes de A. (*Sugerencia:* escribe e^A como serie de Taylor).

Ejercicio 5: Relación de incertidumbre generalizada

En este ejercicio demostrarás la relación de incertidumbre generalizada para dos operadores hermitianos A y B,

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2,$$

donde $\Delta A^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle$ y $\Delta B^2 = \left\langle (B - \langle B \rangle)^2 \right\rangle$.

a. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \leq \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle$

   I. Definiendo $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + \lambda |\phi_2\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, encuentra la desigualdad resultante de $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$.

   II. La desigualdad obtenida es válida para toda λ. En particular para $\lambda = - \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle / \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle$. Usa esto para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

b. Usando esta desigualdad para $|f\rangle = (A - \langle A \rangle) |\psi\rangle$ y $|g\rangle = (B - \langle B \rangle) |\psi\rangle$ obtén que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq |\langle f | g \rangle|^2.$$

c. Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i}(z - z^*) \right]^2$.

d. Muestra que $\langle f | g \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ y $\langle g | f \rangle = \langle BA \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle$.

e. Concluye que

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2.$$

f. ¿Qué forma toma la relación de incertidumbre para $A = X$ y $B = P$?

Nota: el conmutador de dos operadores Hermitianos tiene un factor de i por lo que la cantidad dentro de el paréntesis es real y por tanto su cuadrado es positivo.

Ejercicio 6: Fases globales y fases relativas

El objetivo de este ejercicio es resaltar que una fase global de un estado no tiene significado físico mientras que una fase relativa dentro de una superposición sí lo tiene.

a. Muestra que para un observable arbitrario A, su valor esperado $\langle A \rangle$ es el mismo para los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\varphi} |\psi\rangle$ con φ un número real.

b. Considerando una base ortonormal $\{|\phi_n\rangle\}$ de eigenvectores de A con eigenvalores $\{a_n\}$, muestra que para un estado $|\psi\rangle = \sum_n e^{i\varphi} c_n |\phi_n\rangle$ la probabilidad de obtener el resultado a_n al hacer una medición no depende de φ.

c. Considera la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, el estado $|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y los operadores $B = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ y $C = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ y contesta las siguientes preguntas:

I Calcula $\langle\psi|B|\psi\rangle$ y $\langle\psi|C|\psi\rangle$.

II Obtén los eigenvalores y eigenvectores de C y B y usa esto para argumentar por qué $\langle\psi|B|\psi\rangle$ depende de θ mientras que $\langle\psi|C|\psi\rangle$ no.

Ejercicio 7: Operadores de posición y momento

Calcula el conmutador $\left[X^2, P^2\right]$ en términos de X y P. Es decir, déjalo en términos de X y P disminuyendo el exponente de manera similar al ejercicio 3a.

Ejercicio Extra 1 : Representación de posición y momento **+1**

En clase mostramos que $\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. En este inciso mostrarás una relación análoga para la representación $\{|p\rangle\}$. Muestra que

a. Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ la función de onda en el espacio de momento, el efecto de aplicar el operador X es:

$$\langle p|X|\psi\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p)$$

b. Para $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ y $\varphi(p) = \langle p|\varphi\rangle$ funciones de onda en el espacio de momento, los elementos de matriz del operador X están dados por:

$$\langle\varphi|X|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p\, \varphi^*(p) i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(p),$$