Mecánica Cuántica

Semestre 2022-2

Prof: Asaf Paris Mandoki

Ayud: Leonardo Uhthoff Rodríguez

Ayud: Alondra Jazmín Tapia de la Rosa

Tarea 5
Entrega: 29/05/2022

Potencial central

Ejercicio 1: Potencial central y momento angular
Muestra que si una partícula está sujeta a un potencial central entonces el momento angular orbital es una constante de movimiento. Es decir, muestra que todas las componentes de $\vec{L}$ conmutan con un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r).$$

Ejercicio 2: Operadores escalera de momento angular
En clase encontramos que los armónicos esféricos con $m = \ell$ tienen la forma

$$Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = N \sin^\ell \theta e^{i\ell\varphi},$$

donde N es una constante de normalización.

a. Calcula N para el caso $\ell = 1$.

b. Usa L_- para obtener $Y_1^0(\theta, \varphi)$ y $Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$.

Sistemas compuestos

Ejercicio 3: Sistemas compuestos
Considera dos partículas (distinguibles) donde cada una tiene un espín con $s = 1/2$. Siguiendo la notación usual del curso, podemos representar el estado de **cada una** de estas partículas en la base

$$\{|+\rangle = |s = 1/2, m = +1/2\rangle, |-\rangle = |s = 1/2, m = -1/2\rangle\}.$$

a. ¿Cuál es una base para el espacio de estados del sistema compuesto por **ambas** partículas?

b. Si S_{1z} es la componente Z del operador de momento angular de la partícula 1. Escribe la representación matricial de S_{1z} en la base del inciso anterior. ¿Qué forma tomaría este operador si sólo consideramos la base para el espacio de estados de una sola partícula?

c. Escribe un estado del sistema compuesto que no se pueda escribir (factorizar) como producto tensorial de estados de los sistemas individuales.

Suma de momentos angulares

Para esta tarea usaremos la notación de suma de momentos angulares que usamos en clase. En la que

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

cuyos números cuánticos asociados son j, m, j_1, m_1 y j_2, m_2 respectivamente.

Ejercicio 4: Suma de momentos angulares
Al sumar dos momentos angulares el número cuántico de magnitud de momento angular total j cumple que:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2.$$

En clase demostramos la cota superior argumentando que

$$j_{\max} = m_{\max} = m_{1\max} + m_{2\max} = j_1 + j_2.$$

Sin embargo, quedó pendiente mostrar la cota inferior. Muestra que $|j_1 - j_2| \leq j$ para que el número de elementos en las bases $\{|j_1\, j_2\, j\, m\rangle\}$ y $\{|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle\}$ sea el mismo.
Nota: puedes usar que $j \leq j_1 + j_2$.

Ejercicio 5: Conumtador de momento angular

a. Calcula $\left[J^2, J_{1z}\right]$ y $\left[J^2, J_{2z}\right]$. ¿Conmutan estos operadores?

b. Usa los resultados del inicio anterior para mostrar que $\left[J^2, J_z\right] = 0$.

Ejercicio 6: Suma de momentos angulares con $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$
Considera dos momentos angulares $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ cuya magnitud es $j_1 = j_2 = 1$.

a. Enlista todos los elementos de la base de eigenvectores comunes de J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}.

b. Enlista todos los elementos de la base de eigenvectores comunes de J_1^2, J_2^2, J^2, J_z.

c. Escribe $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 2\rangle$ y $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = -2\rangle$ en términos de la base $|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle$.

d. Encuentra $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 0\rangle$ en términos de la base $|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle$ usando el operador de descenso J_-.

e. Escribe $|j_1 = 1, j_2 = 1, j = 2, m = 0\rangle$ en términos de la base $|j_1\, m_1\, j_2\, m_2\rangle$ usando tu tabla/programa preferido para obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan. Indica qué utilizaste.

Ejercicio 7: Operador de permutación

El operador de permutación que intercambia el estado de dos sistemas cuánticos está definido por

$$P_{12} |\alpha\beta\rangle = |\beta\alpha\rangle\,,$$

donde la primera posición del ket corresponde al primer sistema y la segunda posición corresponde al segundo sistema. Considerando dos sistemas de dos niveles, la base ortonormal del espacio de estados se puede escribir como

$$\{|{+}{+}\rangle\,, |{+}{-}\rangle\,, |{-}{+}\rangle\,, |{-}{-}\rangle\}.$$

Escribe la representación matricial de P_{12}.

Ejercicio 8: Dos espines

Considera un sistema conformado por partículas con espín 1/2 de las cuales ignoramos sus variables orbitales. El Hamiltoniano del sistema es

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$$

donde S_{1z} y S_{2z} son los operadores de proyección usuales y ω_1 y ω_2 son constantes reales.

a. El estado inicial del sistema en $t = 0$ es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle]$$

al tiempo t se mide el observable S^2. ¿Qué resultados se pueden obtener?¿Con qué probabilidad se obtiene cada resultado?

b. Para un estado inicial arbitrario, ¿Qué frecuencias de oscilación aparecen en la evolución de $\langle S^2 \rangle$?

Ecuación de Pauli

Ejercicio Extra 1 : Ecuación de Pauli **+1**

El Hamiltoniano para un electrón de masa m, carga q, espín $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ (con σ_x, σ_y, σ_z las matrices de Pauli), sometido a un campo electromagnético con potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ y potencial escalar $U(\vec{r}, t)$ es

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r}, t)\right]^2 + qU(\vec{r}, t) - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t).$$

El último término representa la interacción entre el momento magnético del espín $\frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}$ y el campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t) = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)$.

a. Dando por hecho que las matrices de Pauli cumplen

$$\sigma_j \sigma_k = i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l + \delta_{jk} \mathbb{I},$$

muestra que, para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (o operadores vectoriales que conmutan con los operadores de espín) se cumple que

$$\left(\vec{\sigma}.\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}.\vec{B}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B}\mathbb{I} + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$$

b. Usa el inciso anterior para escribir el Hamiltoniano del enunciado de esta pregunta en la forma llamada "el Hamiltoniano de Pauli"

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\vec{\sigma} \cdot \left[\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r},t)\right]\right\}^2 + qU(\vec{r},t)$$